Math Obsession and Fun in aged

The discourse theme: - Theme Mathematics in AI era (Sheaf, Category theory, Toposes) -

(Preface)

Mathematics with computer

When I was talking with someone who stands by for his near retirements, I noticed that even surprising people wanted to learn math. He seemed not to know where to start with. It is thought there are such people interesting in math from the scratch and those who have realized in every life that learning mathematics would be fun. However most seldom have a opportunity to take mathematical books because of their day-to-day busy practices. In fact, mathematical research is suitable for retired life. It gives us the pleasure of keeping thought in mind the free time. As for all such people, I will give the information about the latest math disciplines describing Universe and topics related to Artificial information. For not only AI researchers but also scientists who are considering breakthrough in their subject, new math disciplines such as categorical theory, fundamental mathematics theory and mathematical logic would be promising.

Recurrence to Meritocracy

In order to maintain industrial competitiveness as an industrialized nation, it is essential to enhance STEM education. Especially math education to nurture the ability to see the world in language as is called mathematics is important. However, its perception is not enough compared with overseas advanced countries. They have already been introducing programming education at elementary schools and are working on education to cultivate the ability to think more deeply with algorithms, not hand calculations. Even in Japan, programming education in elementary school begins in 2020. However, the circumstances of Japan seem to be slightly different from overseas developed countries. Finally, let's talk about circumstances around here.

(Topics)

1. *"FUEKI RYUKO"*

(1) "It is hard to stand if you do not know the invariants.
If you don't know the variants, it' won't be new." *- the word of Basho's disciple Kyorai*
who was a master of famous poetry in the 17th century
FUEKI = the **invariant** (incompatibility, immutable)

and *RYUKO* = the variants, outbreaks which means *"Today is yesterday's pupil"* =

ONKOCHISHIN *i.e.,* Things present are judged by things past.

Differentiation sees the future, integration sees the past, Outbreaks are Integral equation, Laplace transform, covolution.

"*Mathematics is the art of giving the same name to different things.*" - *H. Poincare*

Example of invariant; Gauss curvature, eigenvalue, Euler characteristic,

kernel/image on Cohomologies

"I feel the existence of something similar to the chaotic universe." "*MANYO*," the ancient poem

Example of *RYUKO*; Integral equation, convolution, Laplace transformation

Set theory and Topology, Topological manifold, differentiable manifold, Numerical manifold, Cohomology

(2). THE PHILOSOPHY OF SPACE RECOGNITION

Space consist of polynomial,

$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots$ - *Weyl*'s chamber

Exponents hidden in Betti numbers which is an invariant of high dimensional refraction group.

The number is made of polynomial.

1 = 0.999999…….,

Number is also function

See the tree and understand the forest, Vise versa, see the forest and understand the tree, global and local,

Focusing on functional relationships from the set, the front and the layers

Numbers are also functions; Algebraic Geometry and Intuitive Logic,

Presheaf, Category Theory and Topos.

The concept of more formal global-to-local transition is the presheaf

Local to global (= cohomology)

Sheaf would be cohomology, vector bundle, manifold

(3) Limit & infinity, Taxicab geometry - *Minkowski*

Divide 1 by 3 and multiply 3 by 1/3 * 3 = 0.9999999999...
It is said that 9 is a recurring decimal.
Of course, not as close to 1 as possible, 0.9999999999.. = 1 is strictly 1.

The above decimal display is said to be infinitely close, infinitely close, but never infinite.

In category theory,, the abstract notion of a **limit** captures the essential properties of universal constructions such as products, pullbacks and inverse limits. The dual notion of a **colimit** generalizes constructions such as disjoint unions, direct sums, coproducts, pushouts and direct limits. Limits and colimits, like the strongly related notions of universal properties and adjoint functors, exist at a high level of abstraction.

"*The infinite we shall do right away, The finite may take a little longer.*" - *Ulam*

(4) Keywords of math structure;

Invariant, ***Universal property***, ***Duality***, *Representation, Limit, Colimit, Natural transformation, Adjoint*, *Presheaf*, *Homomorphic, Recursivity*, *Fixed point*, *Embedding*, *Immersion*, *Convolution*, *Orthogonality;*

Gromov–Witten (GW) invariant

Poincaré duality $H^k(M) \cong H_{n-k}(M)$: (M is an n-dimensional oriented closed manifold, then the k-th cohomology group of M isomorphic to the (n-k) th homology group of M, for all integers k)

Jones polynomial (invariant), T-Duality, Micro-macro duality, DHR theory,

Stone-Duality (categorical duality、correspond to lattice, dual adjoint))

Pontryagin duality, Galois' basic theorem as othogonality

Othogonality ; *Fourier, Weblet*, Dissolve a singular point = *Blowup*

2. **RAMANUJAN** AND **SUM OF NATURAL NUMBERS**

1+2+3+4+5+6+...= -1/12, analytic continuation, → Used in standard theory
1+2+4+8+16+......= -1

"*After thinking over man6 months, this problem has been solved, and it is not pleasure when finally demonstrated the right proof. Andre Veil has been joking about this pleasure compared to sexual pleasure.*"

"*There are monsters called **prime** living in the number.*" ζ-functions ,

p-adic number; far as closer, continuing towards the sky, *Hasse principle,*

*M*athematics describing the universe

3. **UNIVERSE OF COMPUTATION** (MATH INNOVATION)

"*Math is science of thinking, Computation is the work of a computer*"

With ***Wolfram alpha,*** Compute 1+2+3+4+5+6+...= -1/12 mentioned above.

Knowledge thus far would be reused as a database.

Discrete mathematics

Continuous and discrete, Discrete convexity equilibrium, Analogy and model.

Local finite topos = foundation for constructing discrete mathematics.

"Doing math is to prove the subject first and foremost! " Math proof-procedures

Proof of theorem, figure out algorithms by AI (ATP) is available?

4. **MATH IN AI ERA** (. . . LIES IN ITS DEGREE OF FREEDOM)

When searching for "idiot" on Google, it is displayed as. . . . (discrete Markov process)

"*Math is languages."*

"Category theory is the common language of every science, such software science."

Foundation and **Theory of Model,** Mathematical logic, FOPL, h.o.l, Monad, Heyting algebra, Topos

Axiom of choice, *Banach-Tarski* paradox),

"*The essence of mathematics lies in its degree of freedom.*" - Cantor

Object / Class, the new set theory

Basics of mathematics can be established without using set theory

Rover Lawvere's intuitionistic logic, Topos, since 1963

"Connection between category theory, algebraic geometry and intuitionistic logic"

The intuitionistic logic = **constructive logic** that does not hold in the law of elimination and exclusion is more universal in mathematics.

Duality The higher-level concept of duality.

The notion of adjunction is a kind of duality that can be considered between two functors. This concept is ubiquitous in mathematics, and reveals intuitive concepts of optimization and efficiency.

From algebraic logic to categorical logic.

Duality is categorical semantics of predicate logic / set theory.

Big data, Mining, Bayesian statistics (*Bayes'* theorem),

That is, while symbolic AI fails, statistical AI, neural network NN are also industrially successful.

Categorical programming language : Haskel

sledgehammer (h.o.l to FOPL)

Integration of symbolic AI and statistical AI, to Quantum language.

Deep learning has been contributing since around 2012.

Neural Network NN: A mathematical model similar to the characteristics of brain functions.

Backpropagation solves exclusive OR.

In machine learning, it is used as an algorithm to train neural networks.

5. **PROS AND CONS OF STEM EDUCATION** (RECURRENCE TO MERITOCRACY)

Industrial structure gives rise to educational disparities, biases wealth to new industries, e.g, between Engineers in State-of-art technology industry such as IT or financial businesses, and old style industries such as farmers and manufactures.

Common core; Algorithm-based math and language education are significant.

Lack of understanding of importance of math, lack of language education.

Poor understanding of programming education, math sense.

Budgeting to hardware such as uniform education and information terminal introduction.

Usefulness of algorithm education in math, 70% of programming languages for teaching of experimental mathematics by “Trial and Error” use Scratch developed in MIT.

The languages of the IIO Games are C, C +, Python.

Learning is finding a logically correct solution in the process of trial and error. We will provide math and algorithm educations through programming to children who will lead the next generation. Also my teaching materials study: "Calculate π, Euler’s formula $e^{i\pi} = -1$” & "The secret of the recurring decimals” are written in Excel, Python and C, C+. Be full of language education. (syntax, semantics)

(CONCLUSION)

1. The paradigm of science approaches has shifted by using intelligent database, analogy, modeling and simulation.

2. Category theory can form the basis of mathematics instead of historical set theory. Category theory creates new mathematics, such as the derived category of coherent sheaf and category theoretical mirror symmetry prediction.

(The derived categories of coherent sheaves are related to mirror symmetry, etc., and is a research theme of the physics of the tip and mathematics describing Universe. But we will not stop here. We further move on to universal logic, toposes in AI era)

3. Duality is categorical semantics of predicate logic and set theory. (Stone-type duality is itself a category-semantics.) The category theory allows the construction of universal logic with a high degree of generality and conceptual clarity.

4. Statistical AI (Big data, Bayesian statistics, etc.) and the deep learning contribute to industrial success. From now on, we have to deepen our work on symbolic AI and merge with statistical AI ..

5. Symbolic AI contributes to mathematical theory, finite model theory, toposes (intuitionistic logic by category theory), quantum language, mathematical philosophy, and so on.

6. Providing algorithmic education and language education to children responsible for the next generation.

(Appendix)

(Interaction between math and AI)

Mathematics is to prove the subject, and the process by computer is to find an algorithm of its solution by trial and error. Statistical and probabilistic AI may lead to unexpected solutions. If it is a perfect information game like Igo-Shogi, the solution can be traced even by human beings. If it is not complete information, human beings accept a solution that only God knows. What is not correct can not be judged from the statistical data Big data (experiences and facts). Learning is memory of information. This is the same for machine learning and children's learning. There are not a few people who learn to accept (remember) copying, experience and facts unconditionally, Inappropriate rules and ethics based experiences and facts should be excluded from the information. At least, it is necessary to sort out incorrect conclusions by universal logic, and to that end we are researching symbolic AI. Symbolic AI including semantics interpretation may also lead to solutions that humans do not expect, and that involves the limits of human knowledge, which also causes curiosity about the search for human knowledge. Finally, math education for children who will lead the next generation is important. Newly introduced programming learning is a trial and error process. Through its programming, math and algorithm education will be promoted. We are studying such teaching materials.

(The difficulties in Math)

The math has two kinds of difficulties: One is the difficulty of understanding abstract concepts such as "Set and Topology". So far, the foundation of mathematics has been constructed from the set and topology. The target of primary education is the numbers and figures to touch, but the target of modern math is the object in front of the eyes. Modern mathematics is not an immediate object or organism, but elementary particles, genes, and the universe. Look at the trees and know the forest, and look at the forest and know the trees (minimum & maximum.) Mathematicians constructed a set dealing with the mathematical universe, and added information on the topology on it.has been developed as sets and topologies, topological manifolds, differentiable manifolds, numerical manifolds, cohomology, etc. However, by focusing on functional relations without using sets and topology, algebraic geometry and intuition logic, sheaf category theory, and toposes can also construct mathematical structures. (Numbers are also functions.)
The other stems from the difficulty of technical terms such as, for example, manifolds. Many of these are foreign words, and the difficulty of meaning comes from poor translation into Japanese. The same concept may be expressed in different terms. And the opposite is also true. The manifold of geometry is expressed as Algebraic variety in algebraic manifolds. It is a problem to assign the same Japanese translation to this. There are too few words. First of all, Japanese syntax is not suitable for expressing logic. Novices must be trained to use mathematics as words. Also, it is desirable to understand the concept as much as possible in comparison with the original language.

(Question of what is space)

If you are a weather and geomagnetics expert, Tateno, Kakioka, you know exactly as a point on the earth without knowing that they are in Tsukuba, Ishioka. Likewise, Tohoku is the same. This is a common name for “Sur queques points d'algèbre homologique (with some points of homology algebra)” published in 1957 by “Tohoku Mathematical Journal” of Tohoku University. If you are an expert, even if you don't know that Tohoku University is in Sendai, you will be able to communicate with Groten Dirk's Tohoku.
This paper deals with the distinctive problems of 20th century abstract mathematics: sheaf, category, and cohomology. These were introduced and studied before Grotundijk by people such as Leray, Cartan,

Erenberg, McLane. However, it may be said that these theories have been completely renewed by this paper.

In the question of what is space, derived from the 19th-century Riemann, by this time, Cartan gives the answer that it is a topological space with sheaves of rings called a space with rings, It was However, with regard to sheaf coefficient cohomology, which is a basic tool for examining such spaces, we do not know how to handle it in a general phase space, except for local compact spaces such as real manifolds. The Tohoku solves this vividly by constructing the Abelian category. This provides a basis for the theory of the scheme and also paves the way for later etal cohomology. The idea of the derived category that emphasizes the underlying complex rather than the cohomology group is also by Grotandijk. The derived category has recently been linked to mirror symmetry.

Open seminar : Math and programming for public

http://imetrics.co.jp/math3/agenda-English.pdf

F.Y.I (Traditional math field and recent math field)

The scope of cultural mathematics is from BC2500 to 19th Century.

Number theory, Diophantine geometry, Algebraic geometry, Topology, Analysis, Linear

algebra, Statistics, Group theory, **Elliptic curves** and Automorphic / Modular form**s** and son.

The recent math from 20th Century

Discrete math, Representation, **Category theory**, Toposes, Model theory . . .

Langlands program, Numerical dynamics, Chaos, Soft matter and so on.

Category theory - in short, it is mathematical Word used in various scenes of modern mathematics. This word has abstract ability and generalization ability which is convenient for describing abstract properties common to various concrete concepts.

Both Sheaf and Topos are extensions of the modern set theory. More precisely, when we shift our logic from classical to intuitionistic logic, it is sheaf and topos that come out of the natural changes in our set concept.

On the other hand, category is a functional extension of the functional concept, and since the functional concept and the set concept are equivalent in the sense that one comes out of the other, the category may also be a modern extension of the set concept In this sense sheaf, category, topos have a close relationship with set theory and mathematical theory.

数学の面白さ、老後の数学へのこだわり

本談話会のテーマ：　『AI時代の数学（層・圏論・トポスへ）』

(まえがき)

(コンピュータと数学)
近くに定年退職を予定していた人と会議でご一緒したとき、退職後に数学を勉強し直したいと話してくれました. しかし、どこから手をつけたらよいか分からないといいます. 若い頃から数学に興味を持っていながら、また数学を学ぶことはきっと楽しいだろうなと気づいたていながら、日常生活の忙しさの中では数学の本を取る機会などあるはずがありません. 実際のところ、数学の研究は引退生活に適しているといえます. 自由な時間をもてることが考え続ける楽しさを与えてくれます. そのようなすべての人々に、宇宙を語る数学、最近の**コンピュータを使う数学**について、また、**今日のAI時代**の背景にある**科学の共通言語・圏論と普遍的論理学**について、少し話題を提供しましょう. AI研究者に限らず、ご自分の研究課題でブレークスルーを考えている方には、圏論や数学基礎論、数理論理学など新しい数学が役立つでしょう.

(メリトクラシーの変容と再構成)
工業先進国としての産業競争力を維持していくにはSTEM教育の充実が欠かせません. 特に**数学の言葉で世界を観る力を養う**教育が重要です. しかし、その認識は海外先進国に比べて十分とはいえません. 海外の先進国は、既に小学校にプログラミング教育を導入し、手計算力ではなく、アルゴリズムにより深く考える力を育てる教育に取り組んでいます. 日本においても、2020年には、小学校でのプログラミング教育がはじまります. しかしながら、日本の事情は海外先進国とは少し違っているようです. 最後に、その辺りの事情を解説しましょう.

(トピックス)

1. 不易流行 (空間認識の哲学)

(1)　“月日は百代の過客にして行きかふ年もまた旅人なり”
“**不易**を知らざれば基たちがたく**流行**を知らざれば風(ふう)新たならず”

不易とは時が経っても変わらないもの (= **不変量** invariant)
流行とは、変化なければ進歩なし (=温故知新 “*outbreaks”*)
微分は未来、積分は過去 →**温故知新**は積分方程式、ラプラス変換、合成積

“数学とは、違うものに同じ名前をつける芸術だ”　ポアンカレ
"*Mathematics is the art of giving the same name to different things.*"
不変量の例、ガウスの曲率、固有値、オイラー標数、コホモロジーの核/ 像. . .

"大海に島もあらなくに海原のたゆたふ浪に立てる白雲" (万葉集 巻7-1089)

混沌とした宇宙に似たものの存在を感じる

集合と位相、位相多様体、可微分多様体、数論多様、コホモロジー

(2) 空間認識の哲学-その２

空間は**多項式**でできている .... 代数幾何

$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + ...$、ワイルの部屋

位相幾何学的な**不変量** ベッチ数に隠された**巾指数**は、高次元鏡映群の不変量

空間は関数である ・・→ 数(点)、関数、層、空間

数は**多項式**でできている

1 = 0.999999……. 、

木を見て森をしる、森を見て木をしる、大局と局所、

集合から、関数(関手)的な関係に注目、

数も関数である、代数幾何学と直観論理、層、圏論、トポスへ

より形式的に大域から局所への移行を考える概念は前層

局所を大域へ(コホモロジーを用いて大域へ)

層はコホモロジーであり、ベクトル束であり、多様体

(3) **極限**と**無限**、 ミンコフスキーのマンハッタン距離

1を3で割り3をかけると、1/3 * 3 = 0.9999999999. . . .

9が 循環 recurring decimal するという.

もちろん、限りなく 1に近づくのではなく、0.9999999999. . . = 1、厳密に1である.

続く限りなく近づくとはいうが、無限に続く無限に近づくとはいわない.

極限には、①数列の極限、②位相空間での極限、③圏論的な極限がある.

圏論的な極限とは、積や引き戻しや逆極限といった普遍的な構成たちの

根底にある性質を捉えた抽象概念である. 双対的に**余極限**とは非交和、直和、余積、

押し出し、直極限のような構成を一般化したもの.

"すぐに手を打たねばならないのが無限、ちょっと長くかかるのが有限" ウラル

(4) 数学構造のキーワード:

不変量、普遍性、**双対性**、表現、自然変換、随伴、準同型、再帰性、不動点、極限、

余極限、前層、埋め込み、嵌め込み 、畳み込み 、直和、直積、直交性など

グロモフ・ウィッテン(GW)不変量

ジョーンズ多項式(不変量)

前層とはモノイドの作用する集合の概念を一般化

余極限とはモノを集めて貼り合わせて対象を作る圏論的構成

ポアンカレ双対 $Hk(M) \cong Hn\text{-}k(M)$: (M の k 次コホモロジー群はすべての整数 k に対して、 $(n-k)$ 次ホモロジー群と同型)

ストーン双対 : (圏論的双対性、束との対応、双対随伴)、T双対性、

ミクロ-マクロ双対性、ポントリャーギンの双対性、直交型の双対定理としてガロアの基本定理を理解

直交性 ; フーリエ変換、*weblet*,　　　特異点の解消=ブローアップ

2. ラマヌジャンと自然数の総和 (ふしぎな数学)

1+2+3+4+5+6+...= -1/12、解析接続、 → 標準理論(9次元宇宙)

1+2+4+8+16+......= -1

アンドレ・ヴェイユは、“長い時間をかけて問題を解いたときの快感は性的快感に匹敵する.”

数には素数という魔物が棲んでいる、**ζ-関数** 、

p-進数 ; 遠いほど近い数、天に続く数、ハッセの原理、宇宙を語る数学

3. 計算の宇宙 (数学のパラダイム変化)

数学は考える科学、思考実験からシミュレーション、計算はコンピュータに委ねる時代

前節の式 1+2+3+4+5+6+...= -1/12 を ***Wolfram alpha*** で計算

これまでの知見をデータベース化、

連続と**離散**、最適化に離散凸解析、 アナロジーとモデル化

局所有限トポス =離散数学を構築するための土台

数学とは主張を証明することだ ボトムアップ アプローチ

仮説、定理・証明、アルゴリズムも、→ AIによる定理証明(ATP)

4. AI 時代の数学

Google で “idiot” と検索すると . . . . ., 離散マルコフ過程、 画像認識検索

数学は言語である.

圏論は科学の共通言語、ソフトウェアサイエンスなど、他の科学の共通言語

基礎論と 有限モデル理論FMT 、数理論理学、一階述語論理FOPL、高階述語論理、
モナド、ハイチング述語論理、トポス

選択公理、タルスキーのパラドックス、
“数学の本質はその自由性にある” カントール、
オブジェクト/クラスで新たな集合論 .
集合論を使わずに、数学の基礎づけが可能.

1963年以降、ローヴェール Lawvere の直観主義論理、トポス.
排中律の成立しない直観主義論理が、数学についてより普遍的.
“圏論と代数幾何と**直観主義論理=構成主義**の結びつき.”

双対性 duality という高次の概念.
随伴という概念は、2つの関手の間に考える, ある種の双対的な関係.
随伴の概念は数学に遍在し,最適化や効率に関する直観的概念を明らかにする.

代数的論理から圏論的論理へ、**双対性は述語論理・集合論の圏論的意味論**である.

AI研究の2大潮流
非記号的AI (統計処理や機械学習を使ってモデルや記述自体も自動で生成)
ビッグデータとデータマイニング、**ベイズ統計**(直観的信頼度)、
初期の記号的AIの失敗の一方、統計的AI、ニューラルネットワークが
産業的に成功.
記号的AI(明示的なモデルや記号に基づいた記述により知的システムを実現)
プロダクションシステム.
圏論的プログラミング言語: Haskel
スレッジハンマー (HOPL → FOPL)
記号的AIと統計的AIの総合、量子論理、量子言語学.

2012年頃から、ディープラーニングが貢献し始めている.
ニューラルネットワークNN: 脳機能の特性に類似した数理的モデル
誤差逆伝播法 Backpropagation が排他的論理和 exclusive or を解決.
機械学習において、ニューラルネットワークを学習させるアルゴリズムに利用.

5. STEM教育の問題と提案 (メリトクラシーの再構成)
産業構造が教育格差を生む、新しい産業に富が偏る.

コモンコア; アルゴリズム重視の数学教育と言語教育.

数学の重要性に理解不足、言語教育不足.

プログラミング教育への理解不足、数学センス.

画一的教育、情報端末導入などハードに予算先行.

数学にアルゴリズム教育の有用性.

試行錯誤 Try & Error による実験数学の提唱 教育用プログラミング言語の70% が MIT開発のScratch使用 .

国際情報オリンピックの言語は、C, C+, Python

私のプログラミング教材研究: “πを計算、e iπ = -1 を計算” “循環少数の秘密.”
言語教育の充実.

(まとめ)

1. 計算をコンピュータに委ねたアプローチがパラダイムを変えた.

2 . 集合論的な数学理論の構成に代わり、圏論により数学理論を構成できる.
連接層の導来圏と圏論的ミラー対称性予想など、圏論が新たな数学を創る.
(連接層の導来圏はミラー対称性に関係するなど、先端の物理理論および宇宙を記述する数学の研究テーマである. しかし、我々はここで立ち止まることはない. 我々はさらに、普遍的論理、トポスへと向かっていく)

3. 双対性は述語論理・集合論の圏論的意味論である(ストーン型双対性はそれ自体圏論的意味論である). 圏論により高度の一般性と概念的明晰性を備えた普遍論理の構築が可能になる.

4. 統計的AI (Big data、ベイズ統計 など)、ディープラーニングが産業的成功に貢献している.
これからは、記号的AIの研究を深め、統計的AIと融合ていかねばならない..

5. 記号的AIには、数理論理学、有限モデル理論、トポス(圏論による直観主義論理学)、 量子言語学、数理哲学などが貢献する.

6. 次世代を担う子供達に、アルゴリズム教育と言語教育を提供.

(解説編)

“月日は百代の**過客**にして行きかふ年もまた旅人なり “

The days and months are eternal travelers, and the coming year is also like a traveler. namely, everything is passing through around him.

“**不易**を知らざれば基たちがたく**流行**を知らざれば風新たならず”

“If you do not know the invariants (incompatibility), the foundation is not established,
if you do not know the variants (outbreaks) it is unable to innovate.”

同意語に、ダーウィンの 進化論 “変化なければ進歩なし”

“It is not the strong species that survive nor the most intelligent, but the one most responsive to change." - Charles Darwin

数学の難しさには、二つの異質な難しさがある. 一つは、”集合と位相”のような抽象的な概念の理解の難しさだ. 数学の礎を構築するおいて、これまでの数学構造は、“集合と位相”という礎から構築された. 初等教育の対象は見て触れる数と図形であったが、 現代数学の対象は目の前の物体や生き物ではなく、素粒子や遺伝子、 宇宙である(微小と極大) 、スローガンに、木を見て森を知る、森を見て木を知る. このような世界を扱うには 集合として構成し、位相をという情報を付け加えた. 集合と位相、位相多様体、可微分多様体、数論多様体、コホモロジーなどと発展してきた. しかしながら集合と位相を使わずとも、関数的な関係に注目しても構築できる. 数も関数であるからある. 代数幾何学と直感論理、層、圏論、トポスによって、数学構造を構成できる.
もう一つは、例えば多様体など専門用語の難しさから来ている. これらの多くが外来語であり、意味の難しさが日本語への翻訳のまずさに由来する. 同じ概念が異なる用語で表されることもある. また、その逆もある. 幾何学の多様体manifoldが、代数多様体ではAlgebraic varietyと表現されている. これに、同じ日本語訳を充てるのは問題である. 語彙が少な過ぎる. そもそも、日本語のシンタックスが論理を表現するに適していない. 初学者は、数学を言葉として使えるように訓練されなければならない. また、できる限り原語と比較して概念を理解することが望ましい.

<u>(従来の数学分野と最近の数学分野)</u>

学校教育の数学は、BC2500から、19世紀までの数学
数論幾何、代数幾何、位相幾何、解析、統計 、群論、**楕円曲線**と保型形式 . . . .
20世紀からの数学、特に20世紀後半からの数学が面白い同じくたようたい
離散数学、表現論、圏論、トポス、理論のモデル . . .

統合的に進化、ラングランズプログラム、数論力学、カオス、ソフトマター、. . . .
例えば超準解析は、non standard analysis を藤原正彦が超準解析と訳した.

グロモフ-ウィッテン不変量とは、シンプレティック多様体へのリーマン面からの擬正則写像 pseudoholohomorphic map の数を数える有理数である.

解析接続 *analytic continuation*, *analytic prolongation* とはリーマン球面 **C** 上の領域で定義された有理型関数に対して定義域の拡張を行う手法の一つ、あるいは、その拡張によって得られた関数

ラングランズ・プログラム *Langlands program* とは、代数的整数論におけるガロア群の理論を、局所体およびそのアデール上で定義された代数群の表現論および保型形式論に結び付ける非常に広汎かつ有力な予想である.

離散ウェーブレット変換は,データ圧縮など工学と計算機科学において一般的に使われる.連続ウェーブレット変換は信号解析,また科学研究においてもっともよく使われている. ウェーブレット変換は,現在非常に多くの様々な用途に,しばしば従来のフーリエ変換を置き換えて使用されている. 分子動力学,第一原理計算,宇宙物理学,密度行列局在,地震地球物理学,光学,乱流そして量子力学を含む,物理学の多くの分野でこのパラダイムシフトがあった.

(グロタン ディークの功績について)
Tateno, Kakioka、といえば気象の専門家なら、これらがつくば、石岡にあることを知らなくても、正確に地球上の点として通じてしまう。
同様に、Tohokuも同じだ。

Tohoku、1957年「東北数学雑誌」に出版された “Sur quelques points d’algèbre homologique (ホモロジー代数のいくつかの点につ いて)” の通称である。専門家なら、Tohoku 大学 が 仙台にあることなど知らなくても、グロタン ディーク Alexander Grothendieck の Tohoku で通じる。この論文では、**層、圏、コホモロジー**という、 20 世紀の抽象数学の特徴的な問題が扱われた。これらは、グロタンディーク以前に、ルレー、カル タン、アイレンバーグ、マックレーンによって導入され研究されていたが、この論文によって、これらの理論が一新された。
リーマンに由来する**空間とは何か**という問いには、カルタンにより、局所環つき空間とよばれる、**環の層のついた位相空間である**、という答えが与えられていた。しかし、そのような空間を調べるための基本的な道具である **層係数コホモロジー**については、実多様体のような局所コンパクト空間についてはともかく、一般の位 相空間でどう扱えばよいのか、分かっていなかった。これを、グロタン ディークは、Tohokuの中で、**アーベル圏**の理論を構築することで鮮やかに解決した。これは、スキームの理論の基礎を与えるとともに、のちのエタ ール・コホモロジーへの道を開くものだった。 グロタンディークはコホモロジー群よりも、 そのもとになる複

体を重視する**導来圏**のアイデアも提供していた。その導来圏は、最近は**ミラー対称性**につながっていく。

Lawvereは1975年のシカゴ講演で、“1963年頃数学の基礎に5つの重要な発展がみられた”と述べた.すなわち
(i) Robinsonのnon standard analysis,
(ii)Cohenによる集合論 における独立性の証明,
(iii)直 観主義的述語 論理におけるKripke解釈,
(iv) Lawvereによる集合圏のelementary theory,
(v) Grothendieck toposにおけるGiraud理論がそれであり,これらは7年後LawvereとTierneyによって統合された"と.
またBoileauとJoya1は1981年の論文で さらに代数幾何,微分幾何,解析的幾何,代数的位相幾何,
cohomologie, homotopie, ガロアの理 論への広がりを指摘している.

圏論またはカテゴリ理論を一言でいうと、現代数学のさまざまな場面で使われる数学のコトバである. このコトバは、さまざまな具体的概念に共通する抽象的性質を記述する上で便利な抽象能力と一般化の能力を持っている. 圏論は, 数学以外の分野では,プログラミング言語・代数的場の量子論・位相的場の理論・複雑 ネットワークの理論などで役に立っている.

層とトポスとは両者とも現代的な集合概念の拡張なのである. もっと正確にいえば,我々の論理を古典論理から直観論理へと移行したときに,我々の集合概念が自然にうける変化をうけて出てくるものが層であり, またトポスなのである.
一方,圏は関数概念の機能的な拡張であって,関数概念と集合概念は一方から他方が出るという意味で同等なものであるから,圏もまた集合概念の現代的拡張といってもよいのである.この意味で層,圏, トポスは集合論および数理論理学と密接な関係をもつている

大域と局所
定義域全体での関数の連続性は各点で連続なことと同値だ. 微分可能性でも実解析性でも正則性でも同じだ. 各点ごとの振る舞いを束ねることで大域的な様子もわかることを指している.
(前層)
位相空間の圏を **Top**, 集合の圏を **Sets** とする. **Top** から **Sets** への**反変関手**を**前層**と呼ぶ.
X を位相空間とし U を X の開集合とする. 全ての $F(U)$ が群, 環, 線型空間などの代数構造を持ち制限写像が準同型になって いるなら, F はそれぞれの代数構造に合わせて群, 環, 線型空間などの層sheafま たは前層 *presheaf*という.

連接層の導来圏
代数多様体 X が 与えられると、その連接層の導来圏. $D^b\mathrm{Coh}(x)$が定義される.

$$....F^0 \to F^1 \to ... \to F^i \to F^{i+1} \to ....$$

代数幾何学と他の数学分野との間の対称性が連接層の導来圏を通じて発見された.
非可換環、有限群の表現論との間の対称性(MacKay対応)、行列因子化との対称性(CY/LG対応)
連接層の導来圏を導入した動機は、代数多様体上の**層係数コホモロジーの双対性理論**を一般化することである.

圏論的ミラー対称性
カラビヤウ多様体と呼ばれるある種の代数多様体Xの連接層の導来圏と、それとミラー対象の関係にあるシンプレティックス多様体X^v の導来深谷圏 $D^b\mathrm{Fuk}(X^v)$の間の圏同値を予想

$$D^b\mathrm{Coh}(x) \cong D^b\mathrm{Fuk}(X^v)$$

圏論超入門解説
圏論は対象と矢印で記述され, その矢には3種類(射・関手・自然変換)ある.
①射 arrow, morphism と呼ばれる矢→で, 射は対象から対象への矢印
②関手 functor と呼ばれる矢⇝で,関手は圏から圏への矢印
関手には,共変関手と反変関手という 2 種類がある.
③自然変換 natural transformation と呼ばれる矢$\dot{\to}$ で,自然変換は関手から関手への矢印
圏$\mathcal{C}$から圏$\mathcal{D}$への 2 つの共変関手 $F, \tilde{F}$ ($F : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ と $\tilde{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ が 関 手) が あるとき， Fから$\tilde{F}$への自然変換$T : F \dot{\to} \tilde{F}$ が 述 べられる.

関手と自然変換は,圏と圏の間の関係, 圏の外向きの関係を表す. 圏の内部の特徴ある構造を言い表す言葉として，**始対象・終対象・積・余積・引き戻し・押し出し・極限・余極限**といった諸概念がある. これらすべては**普遍性** universal propertyというキーワードで統括される. 普遍性という概念は一つの圏の中で特別な役割を担う対象や射を浮き上がらせる. 数学用語としての「普遍性」はすべての事態に通用し,しかもその通用のしかたが**一通りしかない**」というような性質を指す.ある圏の一部分あるいは全体の，すべての各対象に対して唯一のやり方で働き掛ける対象や射があれば，それは普遍性を持つ.

ホモロジーは位相空間の圏**Top**から加群の圏**Ab**への関手である.位相空間の境界という概 念を関手を通して加群の方に写すと，ホモロジー代数という構造が見えてくるが， これは 加群だけを見ていたのでは見抜けないような構造だ.ホモロジー関手も，点レベ ルにまで分解された one-to-one 対応では見抜けない，structure-to-structure 対応とでもいうべき関係を見させてくれる.

さらに, 2つの一見異なる数学分野の概念が互いに変換可能であることを主張する**双対性** duality という高次の概念がしばしば見い出される.

そのような概念は圏論の**随伴** adjunction という概念を使い捉える. 圏論は,数ある数学理論の共通構造を横断的に見い出したり，異なる数学理論の連動 する性質を的確に言い表したりするのに役に立つ.

数理論理学の一分野であるトポス topos は圏論の発展版のような理論である.
圏のモノ射 $f: a \to b$ を「a ならば b である」という論理関係であるかのように 解釈できる体系がトポス. そのためにトポスにおいては真理値の概念を拡張する. 古典論理では，真理値は真か偽の2択しかありえないが,トポスでは真理値概念をかなり柔軟に拡張し，真偽2択でなくその中間を設けます. 圏論の言葉を使うと，こういった拡張を系統的に行える.

古典論理の拡張版として量子論理があるが，真理値概念を拡張することによって量子力学を適切に記述しようという試みがあり，量子トポスあるいはトポス量子論という理論が提案され ている.トポス量子論こそ量子重力理論を語る言葉になり得ると考えている人もいる.

群の表現論も圏の概念を使うと大幅に整理できる.1つの群は一つの圏，群の表現は群 **けいらく** の圏から線形空間の圏への関手，表現から表現への繋絡作用素 intertwiner は自然変換になっている.

表現論 representationとは、ある系に対してそれをアナロジーできる数理モデルの構成、あるいは構成されたモデルをいう. 公理によって定義される抽象空間に座標を入れて数の組からなる空間 $\mathbf{R}n$ と見なしたり、たとえば抽象群をある具体的な空間上の変換群として表す. とくに、ガロア理論はガロア群を根の置換として表すという意味で表現論といえる. また p 進数は有理数のアナロジーとしての表現論ともいえる.

表現論とは、興味のある代数 A について、その(興味ある条件を付けた) A-加群の圏 $\mathcal{C}$ を研究することである.

ストーン双対性:構文論vs意味論

言語的に表現される何らかの(観察可能な)性質の概念と,その性質の適用対象となる何らかの実体の概念があれば,そこには既に双対性の萌芽がある.「実体が性質の適用対象となる」というのは,実体が性質を満たすかどうかが決まっているという意味である. なぜ「双対」なのかというと,性質の数が多くなればなるほど,それら全ての性質を満たす実体の数は減っていくからである. 数学ではしばしば「性質」 は代数に,「実体」は空間により盞現される. ここで、実体(存在論)より観察可能な性質(認識論)に重点を置く「近代主義」に倣って性質を先にしたが,実体の概

念が先で,次にその実体の持つ性質の概念があるとも考えられる.「世界は実体の集まり」という考えと「世界は我々に経験される性質ないしプロセスのなす構造体」という考え(例えばホワイトヘッド)の両方があり,双対性は両者の関係を問題とするのである. さて,性質を記述するものとして多項式を,実体として代数多様体(多項式系の零点の空間)を選べば,代数幾何のヒルベルト双対性(古典的には代数閉体kに対して有限生成既約k代数とk上のアファイン多様体の間の反変圏同値)に至る. 性質と実体として論理式(多項式と同様の形式的対象)とモデル(論理式を満たす「点」,後で説明)をストーン双対性(論理式の代数とモデルの空間の間の反変圏同値)に至る(論理式が増えればモデルは減少). 論理式やモデルの概念は論理(古典的論理や直観主義論理など)に応じていろいろな種類のものがあり,対応するストーン双対性もそれに応じてさまざまである.

直観主義論理 intuitionistic logicとは,ブラウワー が提唱し弟子のハイティングが形式化した. なぜ今,直観主義論理かというと,様々な構成的数学の論理的基盤になっているという事実があるからである. 構成的な論証によりどこまで数学を展開できるのか は,基礎論的な問題意識を抜きにしても興味のあるところである. また,直観主義論理は,基礎論的研究に端を発しつつ,計算機科学寄りの論理学の中で発展してきた. 広義の構成主義者は,哲学思想や基礎論的な立場に縛られず,それどころかいわゆる 構成的証明”に縛られず,証明一般に潜む構成的要素を自由に探究する. ある者は証明の分析を通してアルゴリズムを抽出し,有用な計算情報を獲得しようとする(プルーフ・マイニング). またある者は証明そのものが持つ美しい代数構造に魅せられる. 広義 の構成主義者は,この論法を構成的ではないとして排除をしない. むしろ逆転の発想で,この論法を構成的に解釈するとどうなるかと考える. 要するに,証明のダイ ナミズムを追求するのが計算機科学的な意味での “構成主義” である. その出発点にある のが直観主義論理であり,それとともに考案されたさまざまな道具立てなのである(構造的証明論,実現可能性解釈、関数解釈,**カリー・ハワード同型対応**,古典論理の直観主義 論理への翻訳等). さらに,ハイティング算術 の証明論に触れて「証明とはプログラムである」という考え方を主張する.

さらに,トポスについて考察する. 第1に、集合論を用いずに数学の基礎付けを行なうことができるということをこの理論は示した. 言い換えれば集合論が数学の唯一の基礎を与えるものでないこと,または,おなじことだが,集合論的数学観が唯一の正しい数学観ではないことが示された. 集合論的な数学観に代わるカテゴリー論的ないしはトポス論的数学観が如何なるものであるかは,研究が進んでいるが,同時に私の研究課題である.

第2に,この理論は,数学においてわれわれが通常用いる 所の第一階の述語論理(FOPL,古典論理)が唯一の正しい論理とはいえず,むしろ排中律の成り立たない直観主義論理が,数学においては,より普遍的な性質を備えた理であることを示した. そればかりか,如何なる条件があるトポスをしてその論理を古典的ならしめるか,という問題にも驚くべき解答を見出した.

トポスの着眼点には、次の3点がある.
(1) サイト上の層のカテゴリ –.
(2) 有限極限とベキ対象を持つカテゴリー.
(3) 直観主義高階論理の具体化.

数学とAIの相互の関わり
数学とは, 主題を証明すること. コンピュータによるその過程は**試行錯誤** *Try & Error* で解法のアルゴリズムを見つけることだ. 解法アルゴリズムが判明すれば, 人力でも解ける. 統計的かつ確率的AIは, 予想していない解を導き出すことがある. 囲碁将棋のような完全情報ゲームなら, その解を人間でもトレースできる. 完全な情報でないなら, 人間は神のみ知る解を受け入れるようなもの. 何が正しく正しくないかは, 統計的データ*Big data (*経験 *experiences*・事実 *fact)* からは判断できない. 学習とは, 情報の記憶だ. これは、機械の学習でも, 子どもたちの学習でも同じだろう. 真似・経験・事実を無条件に受け入れる(記憶する)ことを学習という人も少なくないが, 不適切なルールや倫理に基づく経験や事実は情報から排除されるべきだ. 少なくとも, 普遍的論理により正しくない結論を取捨選択しなければならない. そのために記号的AIの研究を進めている. 記号的 (意味論を含む) AIでも, 人間が予想しない解を導き出すかもしれない. それには, 人間の知識の限界が関わっている. また,そこに人間の知の探求への好奇心が働く. 最後に, 次世代を担う子どもたちへの数学教育は重要である. 新しく導入されるプログラミング学習は試行錯誤のプロセスだ. そのプログラミングを通して, 数学とアルゴリズム教育を進めていく. 私たちは, そんな教材を研究しているところである.

References:

AI時代の数学 (層・圏論・トポス) 副題：数学は言語
http://imetrics.co.jp/academy/Topos-presentation.pdf

超入門：圏論とトポス
http://imetrics.co.jp/academy/Introduction2CategoryTheory.pdf

直和・直積
http://imetrics.co.jp/academy/DirectSumProduct.pdf

超準解析とは何か、無限に大きな数、無限に小さな数
http://imetrics.co.jp/academy/infinitesimal.pdf

スキームの圏、連接層
http://imetrics.co.jp/academy/Schemes.pdf

数学はエクスタシィ(講演原稿)
http://imetrics.co.jp/opinion2/Math-is-ecstasy.pdf

筆者著作から抜粋(主に、数学基礎論関係):

有限モデル理論
http://imetrics.co.jp/academy/FiniteModelTheory.pdf

2つのモデル理論
http://imetrics.co.jp/academy/TwoModelTheories.pdf

最近のモデル理論
http://imetrics.co.jp/academy/ModelTheory.pdf

双対性、ストーンデュアリティ索引
http://imetrics.co.jp/opinion2/StoneDuality.htm

双対性
http://imetrics.co.jp/miscellaneous/Duality.pdf

プログラム意味論と再帰プログラム
http://imetrics.co.jp/math3/SSCA2.pdf

ソフトウェアサイエンスとカテゴリ理論1
http://imetrics.co.jp/math3/SSCA1.pdf

カテゴリー理論 ジャーナルクラブ Basic Category Theory, Tom Leinster
http://imetrics.co.jp/academy/BasicCategoryTheory_index.pdf

大人のための数学講座 : 数とプログラミング
http://imetrics.co.jp/math2/agenda.pdf

STEM教育としての数とプログラミング
http://imetrics.co.jp/academy/CommonCore.pdf

モデル理論とコンパクト定理
http://imetrics.co.jp/academy/ModelTheory-CompactTheorem.pdf

筆者の最近の著作ブログへの入り口
http://imetrics.co.jp/opinion/Blog3.pdf 日本語
http://imetrics.co.jp/opinion2/Blog4.pdf English

現代数学用語辞典
http://imetrics.co.jp/mathematics/ModernMathTerms.pdf

（参考）
文科省資料:
新学習指導要領 平成29年3月告示
小学校段階におけるプログラミング教育の在り方について
http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/03/30/1375607_01.pdf

教育の情報化の推進、
未来の学び　プログラミング教育推進月間の実施について（平成31年2月18日事務連絡）
http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/zyouhou/detail/1413666.htm