# Fool proof Category theory and Toposes

The category theory is a mathematical language used in various aspects of modern mathematics. This language has the ability of abstraction and generalization that is useful in describing the abstract properties common to various concrete concepts. The category theory is useful in fields other than mathematics, such as programming languages, quantum theory of algebraic fields, theory of topological fields, theory of complex networks, and so on.

Both Sheaf and Topos are extensions of the modern set theory. More precisely, it is the sheaf and Topos that come out of the set concept that naturally undergo changes when we move on to intuition logic from classical logic.

On the other hand, category theory is a functional extension from the functional concept. Since functional concepts and concepts of sets are equivalent in the sense that one comes out of the other, the category may also be a modern extension of set theory. In this sense sheaf, category and topos have a close relationship with set theory and mathematical theory.

Well, I will explain the outline of the category theory very introductoryly. It is described by an object and an arrow, and there are three kinds (morphism, functor, natural transformation) in the arrow.
1) Arrow $\rightarrow$ called **morphism,** arrow from target to target.
2) Arrow $\rightsquigarrow$ called **functor** is an arrow from outside the category to the category
There are two kinds of functor, i.e, covariants and contravariant functor.
3 Arrow $\dot{\rightarrow}$ called **natural transformation** is an arrow from functor to functor.
When there are two covariant functor $F$, $\tilde{F}$ ( $F : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ と $\tilde{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ is functor ), Natural transformation $T : F \dot{\rightarrow} \tilde{F}$ from $F$ to $\tilde{F}$ is described.
Functor and natural transformation represent the relation between category and category, and the outward relation of category. Natural transformation provides an internal structure for a certain functor, ie a way to transform another functor while retaining the arrow's composition. We also know about functors, which are maps between categories. Perhaps surprisingly, there is a further notion of ‘map between functors’. Such maps are called natural transformations. This notion only applies when the functors have the same domain and codomain:

$$\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B}$$

As a term to express the characteristic structure of category, there are various concepts such as **initial object**, **terminal object**, **product**, **coproduct, pullback**, **pushout**, **limit** and **colimit**. All of this is governed by the keyword universal property. This concept brings to light a subject or role that plays a special role in a category. "Universality" as a mathematical term is valid for all situations, and There is only one common way of doing it, "which means that it has universality if it has an object or morphism that works in a unique way for all objects in part or all of a certain category.

Homology is a functor from categories in topological space to **Ab**, categories in modules (Abel group). If you map the concept of the boundary of the topological space to an **Ab** through functor, you can see the structure of the homological algebra, which is a structure that you can not see if you were only looking at **Ab**. Homological functors also make it possible to see a relationship that can be called structure-to-structure correspondence, which can not be overlooked by one-to-one correspondence decomposed to point level.

By the way, a higher-order concept of **duality** is often found, claiming that two seemingly different mathematical concepts can be transformed into each other. Adjunction is a kind of duality that can be thought of between two functors. The concept of adjunction is ubiquitous in mathematics, revealing intuitive concepts of optimization and efficiency. By definition , an adjunction between categories $\mathcal{C}$ and

$\mathcal{D}$ is a pair of functors (assumed to be covariant) $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ and $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, and for all objects $X$ in $\mathcal{C}$ and $Y$ in $\mathcal{D}$ a bijection between the respective morphism sets. hom $\mathcal{C}(FY, X) \cong$ how $\mathcal{D}(Y, GX)$ such that this family of bijections is natural in $X$ and $Y$. The functor $F$ is called a left adjoint functor or left adjoint to $G$ , while $G$ is called a right adjoint functor or right adjoint to $F$ .
Such concepts are captured using the concept of adjunction of category theory. Category theory is useful for finding the common structure of several mathematical theories crosswise, and accurately expressing the interlocking nature of different mathematical theories. .

The representation theory of groups can be largely organized by using the concept of categories: one group is one category, the group representation is a functor from the category **Grp** of groups to the category **Top** of the linear space, and a connection of intertwinder operator from representation to representation is a natural transformation.
Representation theory is the construction of a mathematical model that can analogize it to a certain system, or a constructed model. Coordinates are drawn in an abstract space defined by an axiom and it is regarded as a space $\mathbf{R}^n$ consisting of numbers. For example, Galois theory can be said to be a representation theory in the sense that it represents Galois groups as permutations of roots, and p-adic numbers are also representations of rationalism as an analogy. Besides, the reperentation theory is to study the category $\mathcal{C}$ of the A-module (with the conditions of interest) for the algebra A of interest.

The abstract notion of a limit captures the essential properties of universal constructions such as products, pullbacks and inverse limits. The dual notion of a colimit generalizes constructions such as disjoint unions, direct sums, coproducts, pushouts and direct limits. Limits and colimits are highly abstracted entities, as are the strongly related concepts universal property and adjunction's functors.

The Yoneda lemma is an abstract result on functors of the type morphisms into a fixed object. It is a vast generalization of Cayley's theorem from group theory (viewing a group as a particular kind of category with just one object and only isomorphisms). It allows the embedding of any category into a category of functors (contravariant set-valued functors) defined on that category. It also clarifies how the embedded category, of representable functors and their natural transformations, relates to the other objects in the larger functor category. It is an important tool that underlies several modern developments in algebraic geometry and representation theory.

Let $\mathcal{C}$ be a locally small category, that is, for each object$A$, $B$, let hom $(A, B)$ be Set. When fixing object $A$, functor that assigns set (object of **Set**) hom $(A, B)$ to each object $B$ of $\mathcal{C}$ can be considered as a object functor of a function from $\mathcal{C}$ to **Set**. This functor is usually written as hA = hom (A,-): $\mathcal{C} \to$ **Set** and is called covariant hom functor. A set of arrows (also referred to as a hom-set) between objects of a certain category generates an important functor to the category of the set. These functors are called **Hom** functors and have many applications in category theory and other areas of mathematics.

Well, I will explain the topos mentioned above. Topos which is a field of mathematical theory, is a theory such as an advanced version of category theory. Topos is a system that can be interpreted as if there is a logical relationship that "if $a$ is $b$" $f$: $a \to b$ in the category. To that end, we extend the notion of truth values in Topos. In classical logic, there are only two choices for truth values, true or false, but in Topos we can systematically do such extensions using category theory.

Although there is quantum logic as an extended version of classical logic, there is an attempt to describe quantum mechanics appropriately by extending the concept of truth values, and the theory of quantum topos or topos quantum theory has been proposed. Some people think that it can be a word that talks about quantum gravity theory.

In addition, we consider topos. First, it showed that we could base our mathematics without using set theory. In other words, it was shown that the same theory of set theory is not the only correct view of mathematics, or in the same way, the construction is not the only basis of mathematics. I will touch in the future discourse what kind of categorical or topos theory of mathematical views to replace the set theoretic view of mathematics.

Second, this theory does not say that the first-order predicate logic (FOPL, classical logic) that we usually use in mathematics is the only correct logic.
Rather, it showed that the intuitionistic logic that does not consist of the exclusionary law is the theory with more universal nature in mathematics.

Not only that, I also found a surprising answer to the question of what conditions topos have to make the logic classical.

There are the following three points in the focus of Topos.
(1) Categories of Sheaf on site –
(2) Categories with finite limits and power objects.
(3) Intuitionistic high-order logic.

Stone duality, Syntax vs Semantics
If there is a concept of some sort of (observable) nature expressed linguistically and the concept of some entity to which the nature is applied, there is already a duality of duality.
"Entities are subject to property application" means that it is decided whether or not the entity satisfies the property.
Why "dual" is because as the number of properties increases, the number of entities that satisfy all these properties decreases.
In mathematics, "property" is often expressed by algebra and "entity" is embodied by space.
Although we first characterized properties based on "modernism" that emphasizes observable properties (epistemology) than entities (ontology), there is also a concept of entities first, then the concept of nature of that entity Conceivable.
There is both the idea that "the world is a collection of entities" and the idea "the structure is a structure made up of the nature or process experienced by us" (eg Whitehead), and the duality is the relationship between the two .
By selecting a polynomial as a property to describe a property and selecting an algebraic manifold (a space of a zero point of a polynomial system) as an entity, Hilbert duality of an algebraic geometry (classically, for finite generation contravariant equivalence of categories between k algebra and affine manifold on k).
Stone duality (algebra of logical expressions and contravariant equivalence of categories between the spaces of models) as a logical expression (a formal object similar to a polynomial) and a model (a "point satisfying a logical expression" ) (If the formula increases, the model decreases).
There are various kinds of logical expressions and concepts of models depending on logic (classical logic, intuitionist logic, etc.), and the corresponding stone duality also varies accordingly.

Intuitionistic logic was advocated by L. E. J. Brouwer and formalized disciple's Arend Heyting. The reason is that intuitionistic logic is now the logical foundation of various constructive mathematics. The extent to which mathematics can be developed by constructive argument is an interesting place even without the basic problem awareness. Also, intuitionist logic has developed in computer science-oriented logic, starting from basic research.

Constructivists in a broad sense are free to explore constructive elements hidden in proofs in general without being bound by philosophical ideas or fundamental positions, or even bound by so-called constructive proofs.  Some people extract algorithms through proof analysis and try to obtain useful computational information (proof mining). Some are attracted to the beautiful algebraic structure of the proof itself. In a broad sense, constructivists do not rule out this argument as not constructive. Rather, I think that what happens when this reasoning is interpreted constructively by the reverse idea.

In short, it is "constructivism" in the computer science sense that pursues the dynamism of proof. The starting point is intuitionistic logic, and various tools devised along with it (structural proof theory, feasibility interpretation, functional interpretation, curry Howard isomorphism, intuitionistic logic of classical logic) Translation etc.). Furthermore, I am inspired by the proof theory of Haiting arithmetic, and I insist on the idea that "proof is a program".

Reference:

Direct sum, direct product
http://imetrics.co.jp/academy/DirectSumProduct.pdf

## 圏論・超入門解説

ー　サルでもわかる圏論のアイデア　ー

圏論(カテゴリ理論)を一言でいうと,現代数学のさまざまな場面で使われる数学のコトバである.このコトバは、さまざまな具体的概念に共通する抽象的性質を記述する上で便利な抽象能力と一般化の能力を持っている. 圏論は, 数学以外の分野では,プログラミング言語・代数的場の量子論・位相的場の理論・複雑ネットワークの理論などで役に立っている.

層とトポスとは両者とも現代的な**集合概念**の拡張なのである. もっと正確にいえば,我々の論理を古典論理から直観論理へと移行したときに,我々の集合概念が自然にうける変化をうけて出てくるものが層であり, トポスである.

一方,圏は**関数概念**の機能的な拡張であって,関数概念と集合概念は一方から他方が出るという意味で同等なものであるから,圏もまた集合概念の現代的拡張といってもよいのである.この意味で層,圏, トポスは集合論および数理論理学と密接な関係をもつている.

さて,圏論について,その概略を超入門的に解説する.圏論は対象と矢印で記述され, その矢には3種類(射・関手・自然変換)ある.

① **射** arrow, morphism と呼ばれる矢→で, 射は対象から対象への矢印

② **関手** functor と呼ばれる矢⇝で,関手は圏から圏への矢印

関手には,共変関手と反変関手という 2 種類がある.

③ **自然変換** natural transformation と呼ばれる矢$\dot{\to}$ で,自然変換は関手から関手への矢印

圏$\mathscr{C}$から圏$\mathscr{D}$への 2 つの共変関手 $F, \tilde{F}$ ( $F:\mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ と $\tilde{F}:\mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ が 関 手 ) が あるとき， $F$から$\tilde{F}$への自然変換$T: F \dot{\to} \tilde{F}$ が 述 べられる.

関手と自然変換は,圏と圏の間の関係, 圏の外向きの関係を表す. 自然変換は,ある関手をその圏に関する内部構造,すなわち,射の合成を保ちながら別の関手に変形する方法を与えるものである.
カテゴリーの間の射であり,関手間の射であるような射を自然変換という.

$$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathscr{B}$$

この概念は, 2 つの関手の定義域と 値域が同一のときに限って適用される.

圏の内部の特徴ある構造を言い表す言葉として，**始対象・終対象・積・余積・引き戻し・押し出し・極限・余極限**といった諸概念がある. これらすべては**普遍性** universal propertyというキーワードで統括される. 普遍性という概念は一つの圏の中で特別な役割を担う対象や射を浮き上がらせる. 数学用語としての「普遍性」はすべての事態に通用し,しかもその通用のしかたが**一通り**

**しかない**」というような性質を指す.ある圏の一部分あるいは全体の，すべての各対象に対して唯一のやり方で働き掛ける対象や射があれば，それは普遍性を持つ.

ホモロジーは位相空間の圏から加群の圏**Ab**への関手である.位相空間の境界という概念を関手を通して加群**Ab**の方に写すと，ホモロジー代数という構造が見えてくるが，これは 加群だけを見ていたのでは見抜けないような構造だ.ホモロジー関手も，点レベ ルにまで分解された1対1対応では見抜けない，構造間対応とでもいうべき関係を見させてくれる.

さらに，2つの一見異なる数学分野の概念が互いに変換可能であることを主張する**双対性** duality という高次の概念がしばしば見い出される.そのような概念は圏論の**随伴** adjunction という概念を使い捉える. 随伴とは、2つの関手の間に考えることができる, ある種の双対的な関係であり、随伴の概念は数学に遍在し,最適化や効率に関する直観的概念を明らかにする.圏論は,数ある数学理論の共通構造を横断的に見い出したり，異なる数学理論の連動 する性質を的確に言い表したりするのに役に立つ. 最も簡潔な対称的定義において、圏$\mathcal{C}$と$D$の間の随伴とは、二つの関手$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$と$G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$の対であり、$\hom_C(FY, X) \cong \hom_D(Y, GX)$ が、変数$X, Y$に関して自然(あるいは関手的)となるものをいう.

群の表現論も圏の概念を使うと大幅に整理できる.1つの群は一つの圏，群の表現は群の圏**Grp**から線形空間の圏Homへの関手，表現から表現への繋絡作用素 intertwiner は自然変換になっている.

**表現論** representationとは,ある系に対してそれをアナロジーできる数理モデルの構成,あるいは構成されたモデルをいう. 公理によって定義される抽象空間に座標を入れて数の組からなる空間 $\mathbf{R}^n$ と見なしたり,たとえば抽象群をある具体的な空間上の変換群として表す. とくに,ガロア理論はガロア群を根の置換として表すという意味で表現論といえる. また $p$ 進数は有理数のアナロジーとしての表現論ともいえる. また,表現論とは, 興味のある代数 $A$ について,その(興味ある条件を付けた) $A$-加群の圏 $\mathcal{C}$ を研究することである.

**極限** limit とは,積や引き戻しや逆極限といった普遍的な構成たちの根底にある性質を捉えた抽象概念である. 双対的に**余極限**とは非交和,直和,余積,押し出し,直極限のような構成を一般化したものである. 極限と余極限は,強く関連した概念である普遍性や随伴関手と同様に,高度に抽象化された存在である.

米田の補題とは,射のタイプの関手が固定対象になる抽象的な結果である. これは,群論からのCayleyの定理を広く一般化したものである. 1つのオブジェクトとただ1つの同型のみを持つ特定の種類のカテゴリとしてのグループの表示. それはそのカテゴリで定義された反変関手圏への任

意の圏の埋め込みを可能にする．また,表現可能関手とそれらの自然な変換の埋め込まれた圏が、より大きな関手圏の他の対象とどのように関連しているかを明確にする. それは代数幾何学と表現論におけるいくつかの現代数学発展の基礎となる重要な道具である.

**米田の補題** Yoneda lemma とは,小さなhom集合をもつ圏 $\mathcal{C}$ について,共変hom関手 hom($A$, -) : $\mathcal{C}$ → **Set** から集合値関手 F :$\mathcal{C}$ → **Set** への自然変換と,集合である対象 F(A) の要素との間に一対一対応が存在するという定理である. 局所的に小さい(locally small)圏を $\mathcal{C}$ とする,すなわち各対象 $A$, $B$ に対して hom($A$, $B$) は集合であるとする. 対象$A$を固定するとき,$\mathcal{C}$ の各対象 B に対して集合（**Set** の対象）hom($A$,$B$) を割り当てる関数は,$\mathcal{C}$ から **Set** への関手の対象関数として考えることができる. この関手は大抵 hA = hom($A$, -) : $\mathcal{C}$ → **Set** と表記され、共変hom関手 covariant hom functor と呼ばれる．ある圏の対象の間の射の集合(hom-setともいう)は,集合の圏への重要な関手を生成する. これらの関手を**Hom関手**(Hom functor)と呼び,圏論や数学の他の分野で多くの応用を持つ.

先に言及したトポスについて解説する. 数理論理学の一分野であるトポス topos は圏論の発展版のような理論である.圏のモノ射 $f : a \to b$ を「$a$ ならば $b$ である」という論理関係であるかのように 解釈できる体系がトポス. そのためにトポスにおいては真理値の概念を拡張する. 古典論理では，真理値は真か偽の2択しかありえないが,トポスでは真理値概念をかなり柔軟に拡張する. 圏論の言葉を使うと，こういった拡張を系統的に行える.

古典論理の拡張版として量子論理があるが，真理値概念を拡張することによって量子力学を適切に記述しようという試みがあり，量子トポスあるいはトポス量子論という理論が提案され ている.トポス量子論こそ量子重力理論を語る言葉になり得ると考えている人もいる.

さらに,トポスについて考察する. 第1に,集合論を用いずに数学の基礎付けを行なうことができるということをこの理論は示した．　言い換えれば集合論が数学の唯一の基礎を与えるものでないこと,または,おなじことだが,集合論的数学観が唯一の正しい数学観ではないことが示された．集合論的な数学観に代わるカテゴリー論的ないしはトポス論的数学観が如何なるものであるかは,今後の談話の中で触れていく.

第2に,この理論は,数学においてわれわれが通常用いる　所の第一階の述語論理(FOPL,古典論理)が唯一の正しい論理とはいえず,むしろ排中律の成り立たない直観主義論理が,数学においては,より普遍的な性質を備えた理であることを示した．　そればかりか,如何なる条件があるトポスをしてその論理を古典的ならしめるか,という問題にも驚くべき解答を見出した.

トポスの着眼点には、次の3点がある。

(1) サイト上の層のカテゴリ –.
(2) 有限極限とベキ対象を持つカテゴリー.
(3) 直観主義高階論理の具体化.

ストーン双対性:構文論vs意味論
言語的に表現される何らかの(観察可能な)性質の概念と,その性質の適用対象となる何らかの実体の概念があれば,そこには既に双対性の萌芽がある. 「実体が性質の適用対象となる」というのは,実体が性質を満たすかどうかが決まっているという意味である. なぜ「双対」なのかというと,性質の数が多くなればなるほど,それら全ての性質を満たす実体の数は減っていくからである. 数学ではしばしば「性質」 は代数に,「実体」は空間により表現される. ここで,実体(存在論)より観察可能な性質(認識論)に重点を置く「近代主義」に倣って性質を先にしたが,実体の概念が先で,次にその実体の持つ性質の概念があるとも考えられる. 「世界は実体の集まり」という考えと「世界は我々に経験される性質ないしプロセスのなす構造体」という考え(例えばホワイトヘッド)の両方があり,双対性は両者の関係を問題とするのである. さて,性質を記述するものとして多項式を,実体として代数多様体(多項式系の零点の空間)を選べば,代数幾何のヒルベルト双対性(古典的には代数閉体kに対して有限生成既約k代数とk上のアファイン多様体の間の反変圏同値)に至る. 性質と実体として論理式(多項式と同様の形式的対象)とモデル(論理式を満たす「点」)をストーン双対性(論理式の代数とモデルの空間の間の反変圏同値)に至る(論理式が増えればモデルは減少). 論理式やモデルの概念は論理(古典的論理や直観主義論理など)に応じていろいろな種類のものがあり,対応するストーン双対性もそれに応じてさまざまである.

直観主義論理 intuitionistic logicとは,ブラウワー が提唱し,弟子のハイティングが形式化した. なぜ今,直観主義論理かというと,様々な構成的数学の論理的基盤になっているという事実があるからである. 構成的な論証によりどこまで数学を展開できるのか は,基礎論的な問題意識を抜きにしても興味のあるところである. また,直観主義論理は,基礎論的研究に端を発しつつ,計算機科学寄りの論理学の中で発展してきた. 広義の構成主義者は,哲学思想や基礎論的な立場に縛られず,それどころかいわゆ る 構成的証明”に縛られず,証明一般に潜む構成的要素を自由に探究する. ある者は証明の分析を通してアルゴリズムを抽出し,有用な計算情報を獲得しようとする(プルー フ・マイニング). またある者は証明そのものが持つ美しい代数構造に魅せられる. 広義 の構成主義者は,この論法を構成的ではないとして排除をしない. むしろ逆転の発想で,この論法を構成的に解釈するとどうなるかと考える. 要するに,証明のダイ ナミズムを追求するのが計算機科学的な意味での “構成主義” である. その出発点にある のが直観主義論理であり,それとともに考案されたさまざまな道具立てなのである(構造的証明論,実現可能性解釈,関数解釈,カリー・ハワード同型対応,古典論理の直観主義 論理への翻訳等). さらに,ハイティング算術の証明論に触れて「証明とはプログラムである」という考え方を主張する.

参照

直和・直積　http://imetrics.co.jp/academy/DirectSumProduct.pdf