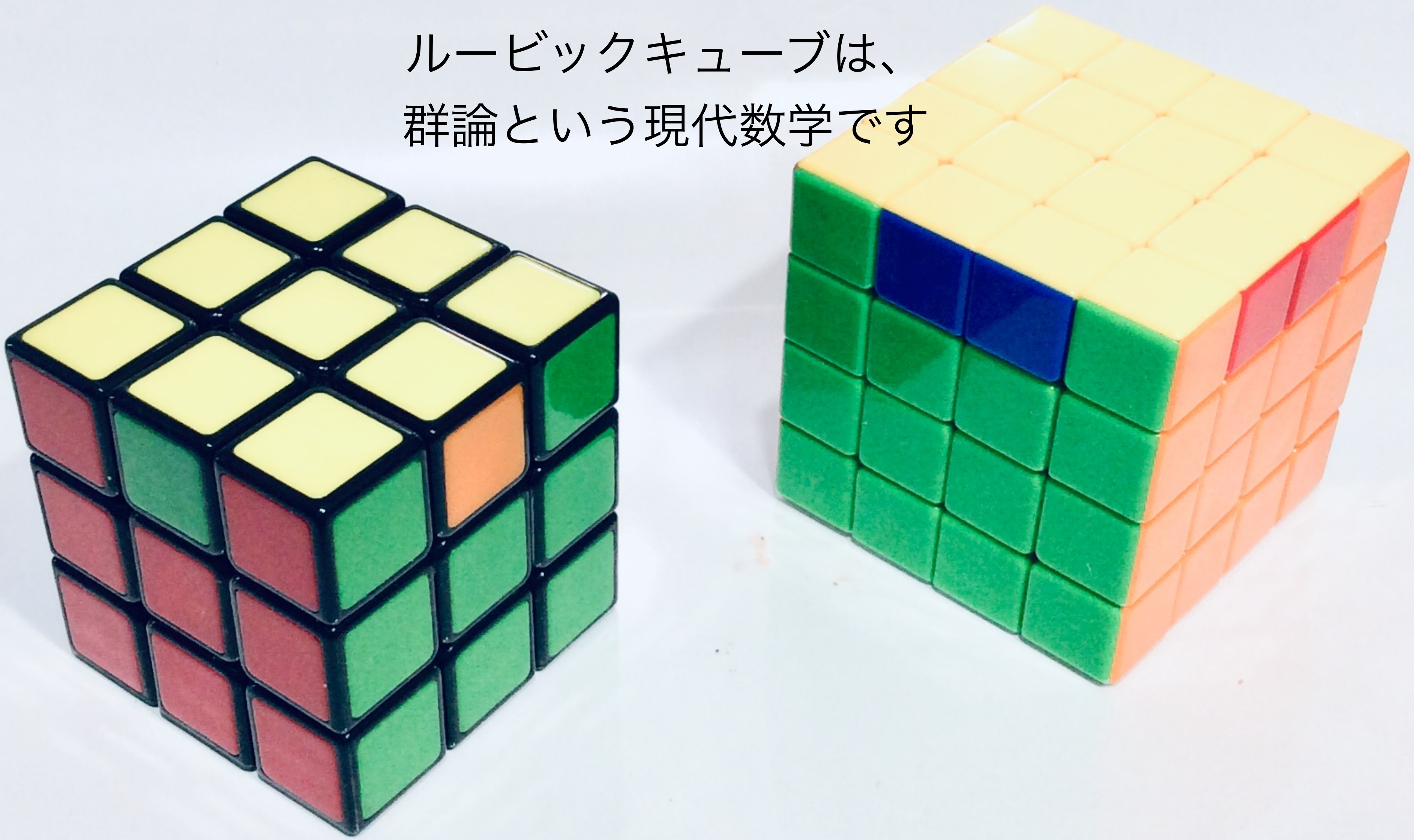
置換群で解き明かす
ルービックキューブ

ルービックキューブは、
群論という現代数学です



S. Kusafusa

rev 2.1

はじめに

ルービックキューブは数学です。ここでは置換群、循環群を学びます。
ルールを学んで、ルービックキューブを解いてみましょう。

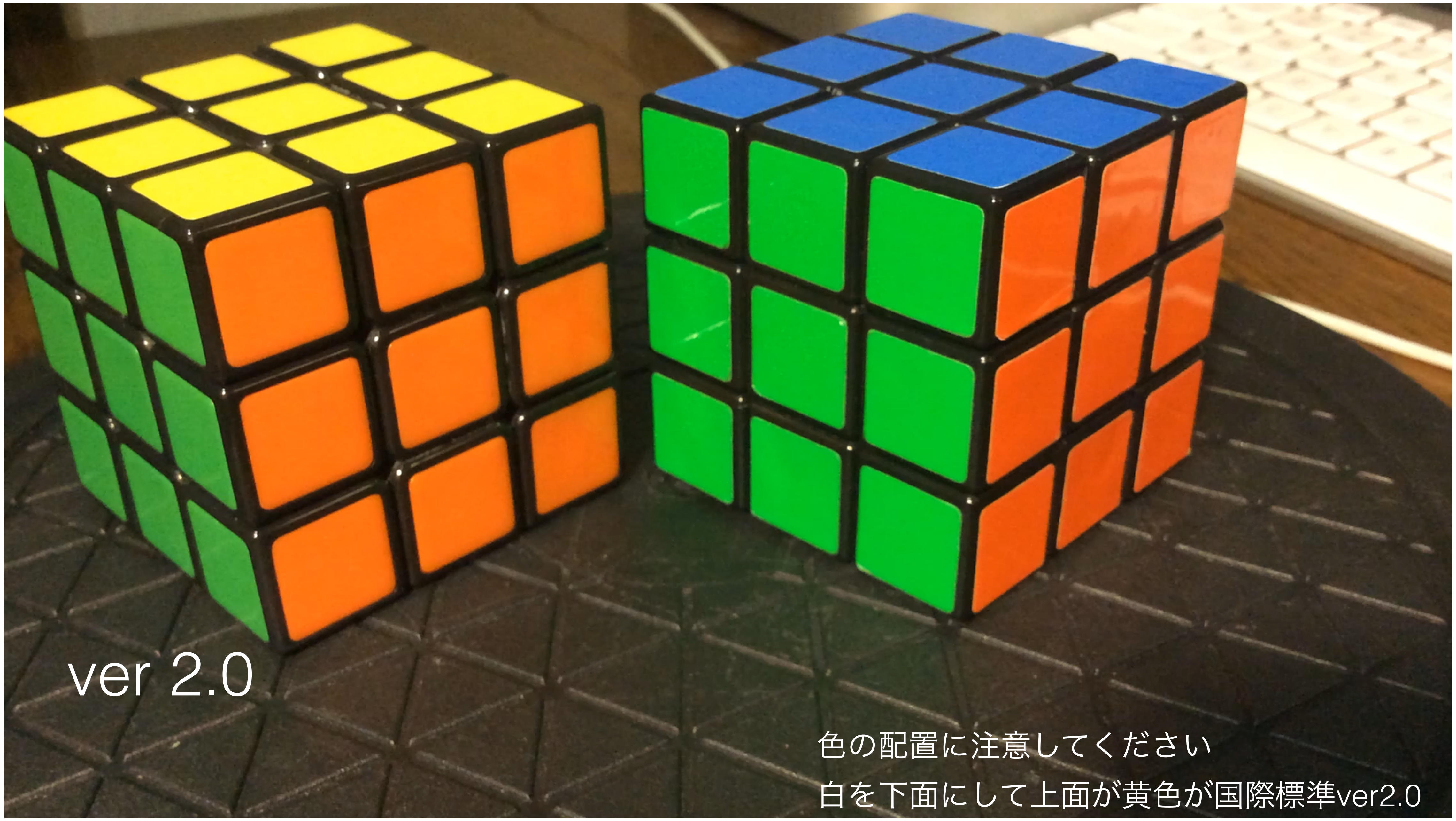
置換群によるルービックキューブの解法 - YouTube
https://www.youtube.com › watch

2015/01/05 · ルービックキューブは群論という数学です 置換群の交換子を ...

https://youtu.be/V41WblOyrV0

ルービックキューブを新たに購入するときの注意

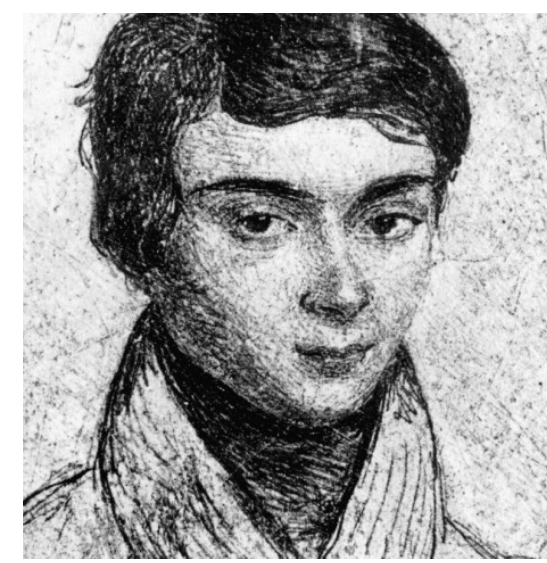
Rubik's Cube Version 2.0 & 1.0



ルービックキューブと群論

ルービックキューブは、1974年、ハンガリーの建築家でブダペスト工科大学教授だったエルノー・ルービックによってに考案された
多くの数学者によりルービックキューブが群論の教材に適していることが指摘されている

エヴァリスト・ガロア(Évariste Galois、1811年10月25日 - 1832年5月31日)は、フランスの数学者で革命家
決闘により21才の若さで世を去る
ガロアの理論(群論)は現代数学の扉を開くとともに、20世紀、21世紀科学のあらゆる分野に絶大な影響を与えている



ピースの呼び方

3 x 3 x 3 ルービックキューブ

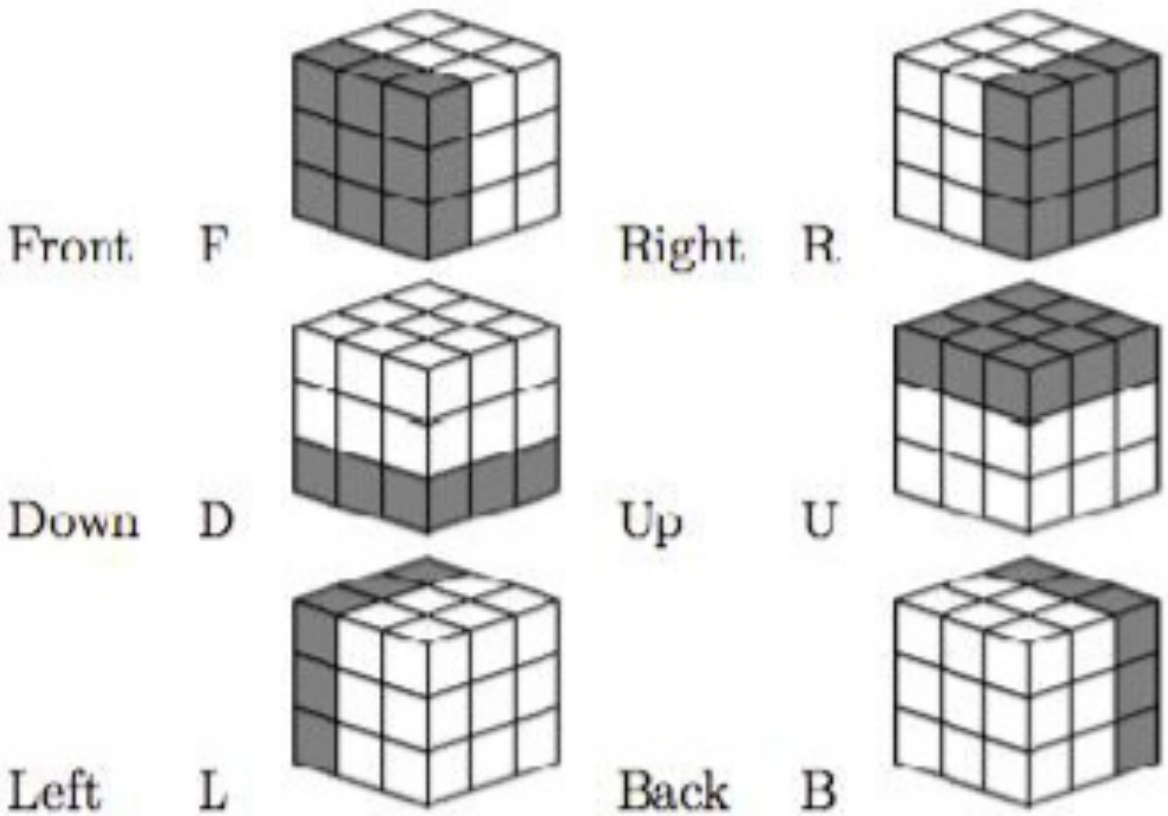
1面体(恒等置換) 6個
Identify permutation
F: face / **center**

3面体 8個
Trihedral
V : vertices / **corner**

2面体 12個
Dihedral
E : **edge**

V-E+F = 2

Mathematics in Rubik's Cube (ルービックキューブの科学)



Upper : Rotation to right
Lower : Rotation to left
Rot (+) : Whole rotation to right
Rot (-) : Whole rotation to left

Cur (+) : Unticlockwise cycle
Cur (-) : Clokwise cycle

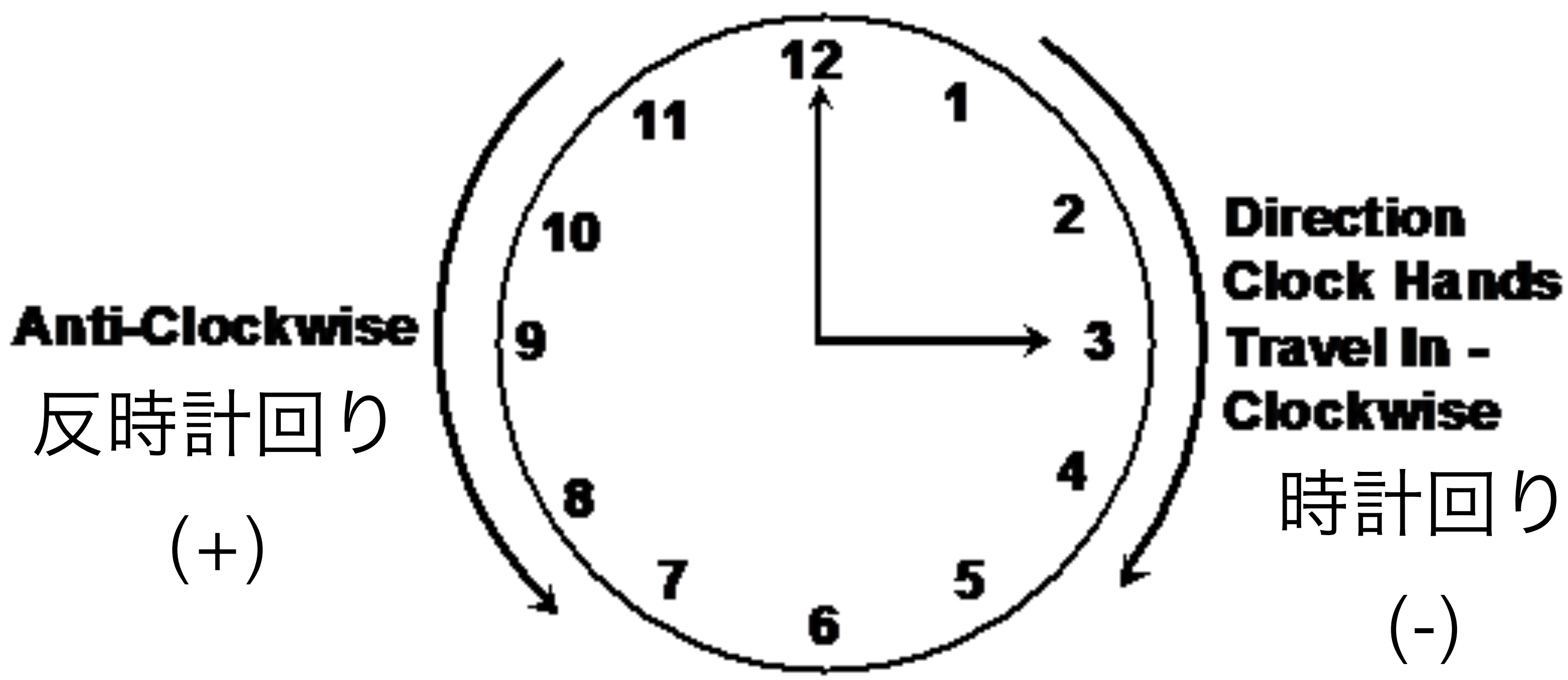
Side: S
Middle: M
Even: E

Facebook: Saige Kusafusa (Sundaebb@gmail.com)
mail: galois@imetrics.co.jp
S. Kusafusa

回転方向のルール　3x3x3の場合

90度回転が1単位

Lower
小文字



反時計回り

(+)

時計回り

(-)

Upper
大文字

※ 数学では、回転を上から見て、反時計回りをプラス(+)

パリティの法則

置換のピースの組み数は、偶数

交換子の数は、偶数

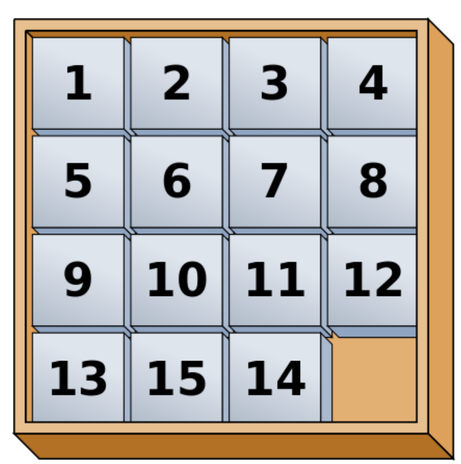
例えば、"C" の場合、u^2を2回と数えて8回

r u R u r u^2 R

３面体と２面体のそれぞれの位置ずれの数に、パリティが保存する

※ もし、互換の数が奇数なら、絶対に揃わない15パズルの初期配置

置換の中でも２つの要素を交換するだけのものを特に互換ともいう



交換子(コミュテータ)とマクロ

Commutators and Macros

A: U R u r F r f R
A': u l U L f L F l

B: r u f U F R

C: r u R u r u^2 R
C': L U l U L U^2 l

D: r u R U L u r U R l
E: L r U l u R U L u l

F: r f R b r F R B
G: b r f R B r F R

0 face: E and then D
4 faces: C and then + C'
1 face: D and then ++ E

Inter: B^2 L U l B^2 R d R D R^2

Cross: R L U^2 r l f b U^2 F B

Cur +: R^2 u s U^2 S u R^2
Cur - : R^2 U s U^2 S U R^2

S. Kusafusa

http://imetrics.co.jp/opinion2/howdoyoufeel.pdf

http://imetrics.co.jp/mathemarics/Rubik's%20Cube.pdf

置換群によるルービックキューブの解法

慣習的に白の固定ピース(*1*面体、恒等置換と呼ぶ)を基底とする。
白の固定ピースに隣接する*4*つの白いエッジピース(*2*面体と呼ぶ)で白い十字を作ることから始める。
移動させたいコーナーピース(*3*面体と呼ぶ)を*90°*単位で回転させながら正しい位置に配置し、第*1*層側面を同じ色で揃えていく。

第*2*層目では、上下を逆さまにし白い面を下にする。(トップの面には黄色の固定ピースがくる)
置換群の理論を使い、第*2*層のコーナーピースを入れ替えていく。
互換のために*3*つのピースに焦点を当てる。（交換子には*3*個以上必要、それは*15*パズルと同じ）
まず、同色の固定ピースの上に同じ色のエッジ(*a*)を置き、交換マクロ ***A***または***A'***を使用して固定ピースのエッジ(*b*)の横に整列させる。 (これらは鏡面対称)
このマクロは、 *a -> b*、*b -> c*、*c -> a*というふうに、*3*つのエッジを回転させる。
置換で押し出されたエッジは、第*1*のエッジの反対側に位置する上方エッジの位置(*c*)に移動する。
ここまでで、*3*層中*2*層までを完了した。

第*3*層では、最初の層と同じように、 ***B***を使って十字形を最初に作る必要がある。そのマクロは*6*つのステップで構成され ている。 (ここでは、コーナーのピースは無視しておく)
さて、 ***C***、***C'***、***D***、***E***などのマクロを繰返し使い、同色(黄色の)ピースを上面に向けて集める。
最後に、*3*層の*PLL*法を使用して、コーナーとエッジをそれぞれ正しい再配置する。
最後に置換すべきピースが*2*個残ったとすると、パリティエラーを起こしている。
いくつかのピースが正しい位置になく、このキューブは揃うことはない。
君は恐らく気づいただろう。*3 x 3*キューブでは、すべての操作が偶数のステップでできている。

Instructions with permutation group theory

Start with making a white cross with 4 white edge-pieces called **dihedra**l adjacent to the white fixed piece called identify permutation. Let the white immobile piece be the basis traditionally. After that, put 4 corner-pieces (called **trihedral**) to right corner position as rotating 90 degrees x n times, then align lateral with the same color on the 1st tier.

The next is the 2nd tier. Turn over the cube, and put the white face to bottom, make yellow fixed piece top. Align four corner pieces of second layer by using permutation group method. Focus on 3 pieces to commutate each other. Commutator must be more 3 pieces. it is the same as the 15-slide puzzle. First, put the same colored edge (a) above the same colored fixed piece, then commutate with beside edge (b) of fixed piece using commutative macro ***A*** or ***A'*** consists of 8 steps. (those are mirror symmetry.) The rotate-shifted edge moves on to upper edge position (c) located the opposite to the first edge. This macro rotates 3 edges as a -> b, b -> c, c -> a. (it is due to permutation group theory.) Up to here, you completed up to 2/3 tiers.

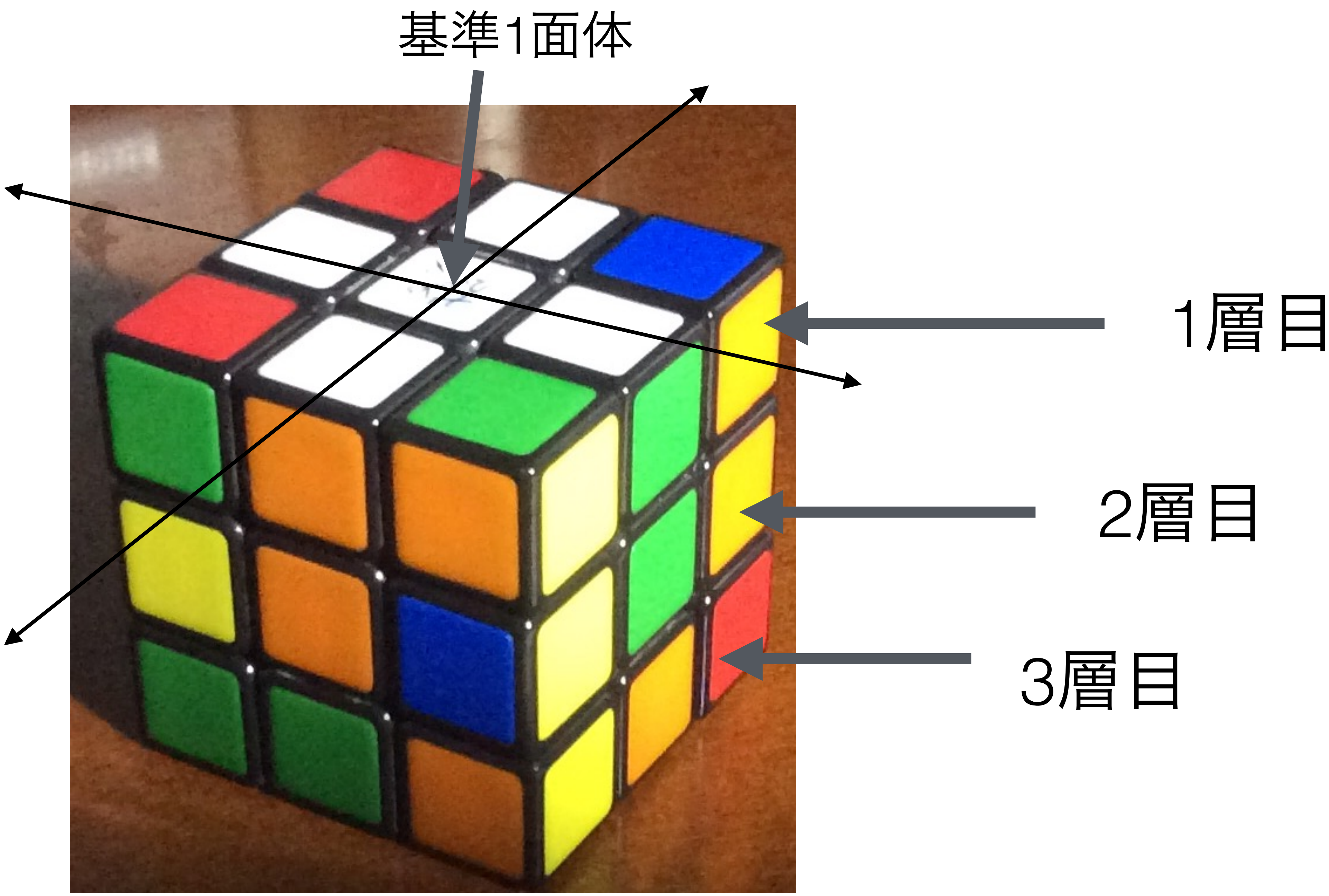
Now you can try to complete the last tire. As the same as the first tire, you have to make the cross first using ***B*** commutative macro consists of 6 steps. (Ignore corner pieces.) Well, you have to gather the same colored (yellow) pieces using macros such as ***C, C', D, E*** repeatedly. Finally, align corners and edges to right position respectively using PLL method on the 3 tier.

You may notice that all operations of 3 x 3 x 3 cube are made with even steps.

by Kusafusa

3層法(CFOP Method (Cross - F2L - OLL - PLL) 注)

[1層目]　基準面"白"を逆さにして、クロスに揃える

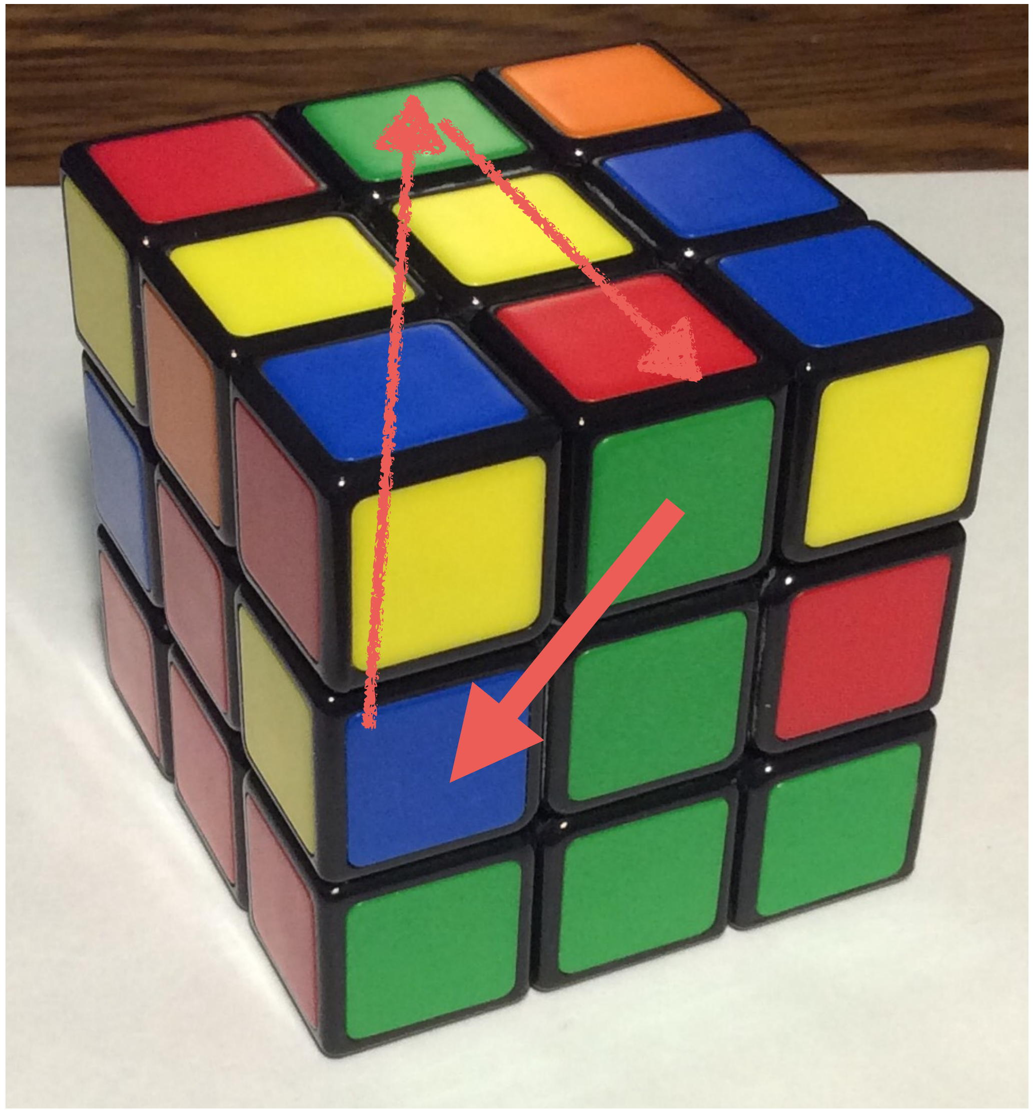


(注)　CFOP: Cross, First two layers, Orient last layer, Permute last layer. Invented in the 1980s by Jessica Fridrich、レーヤー法 layer-by-layer ともいう．この他に、コーナー/エッジ法があるがスマートな方法とはいえない.

[2層目]　2層目のエッジピース(2面体)を揃える

※ 基準面(白面)を下にする

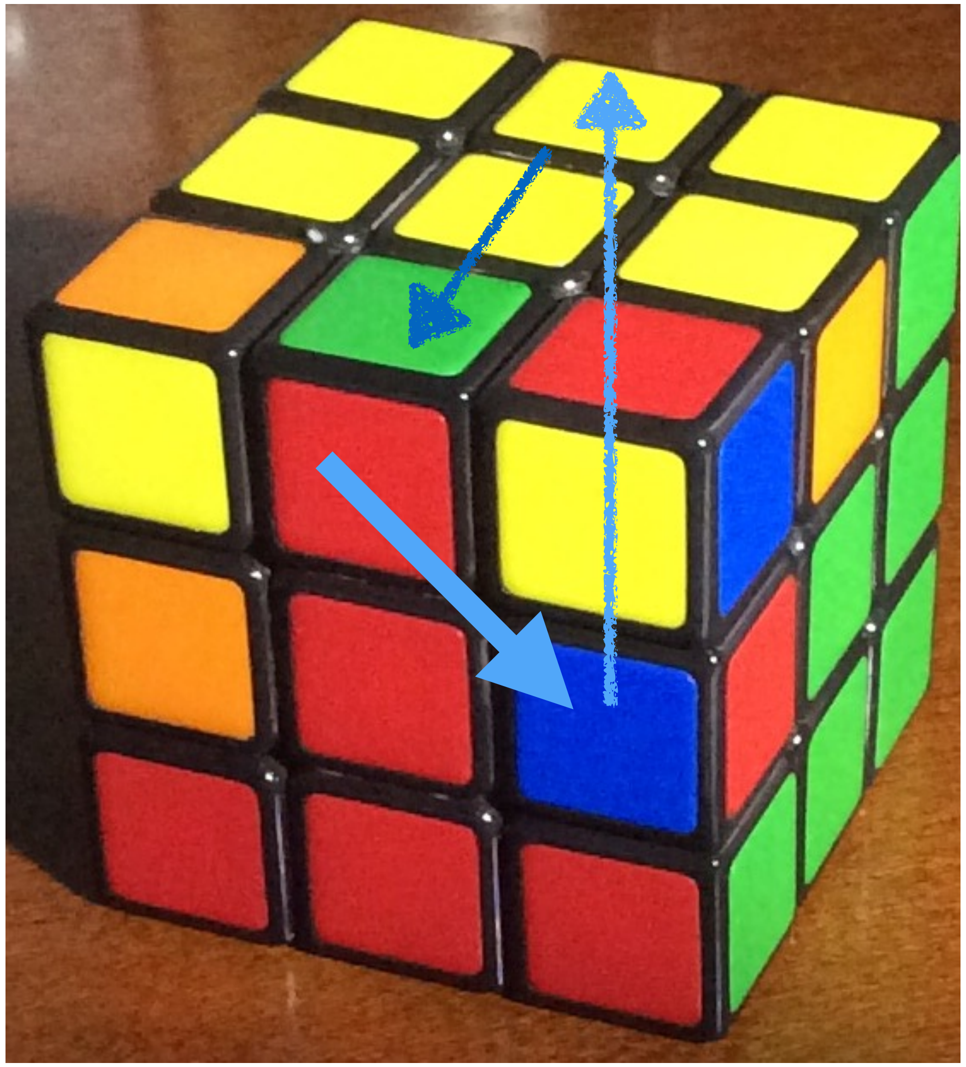
A' の対象



u l U L f L F l

鏡映対称

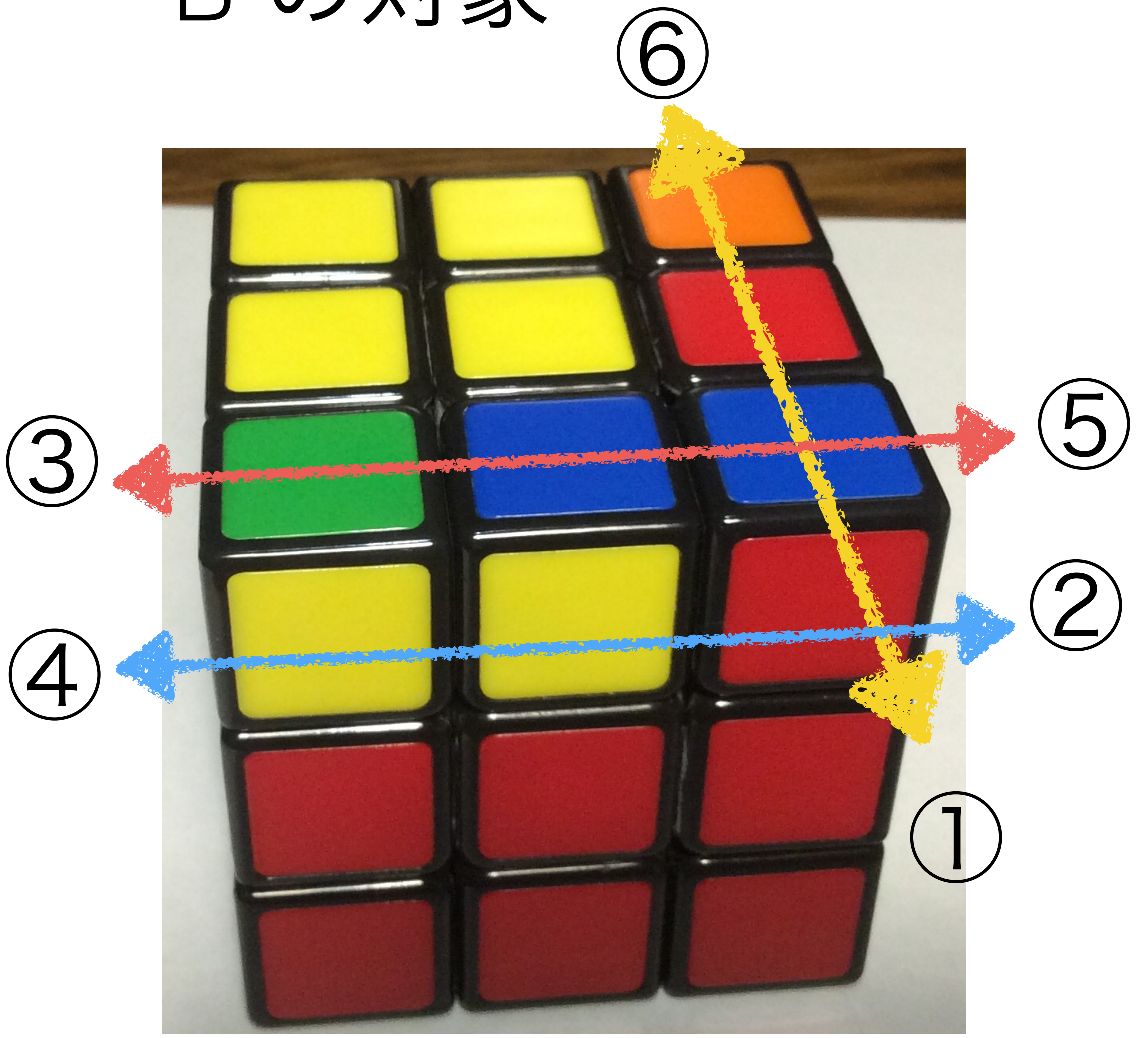
A の対象



U R u r F r f R

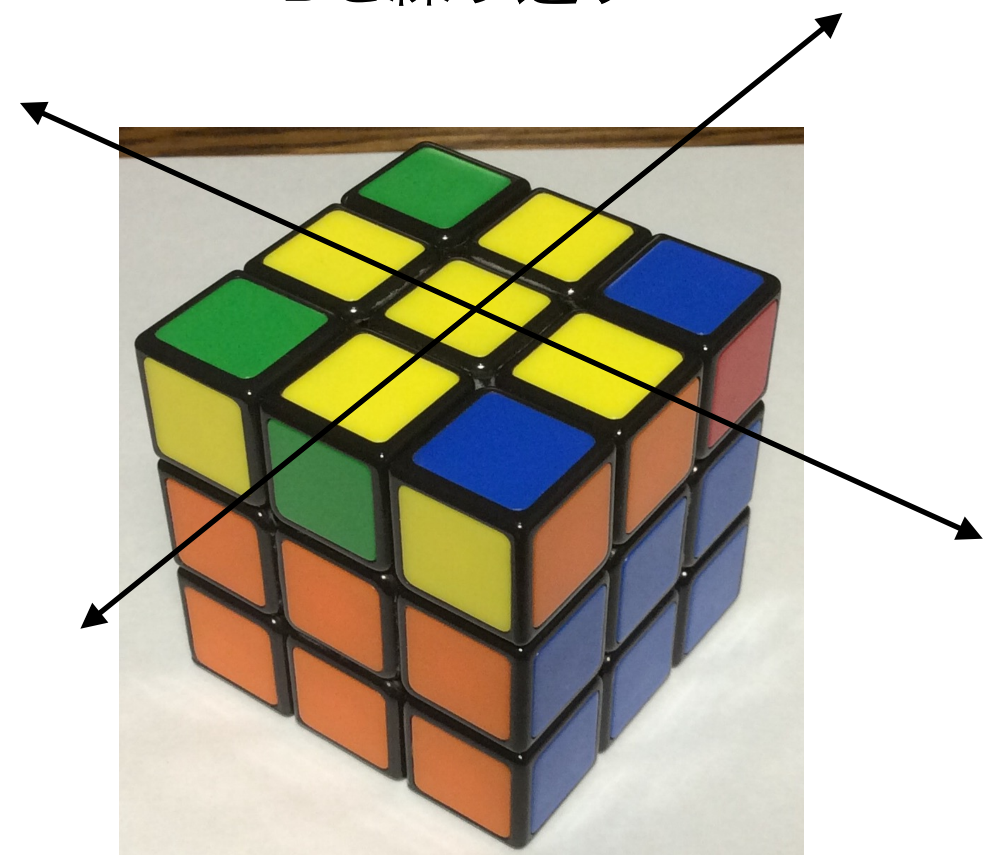
[3層目]　　3層目に、クロスを揃える

B の対象



r u f U F R

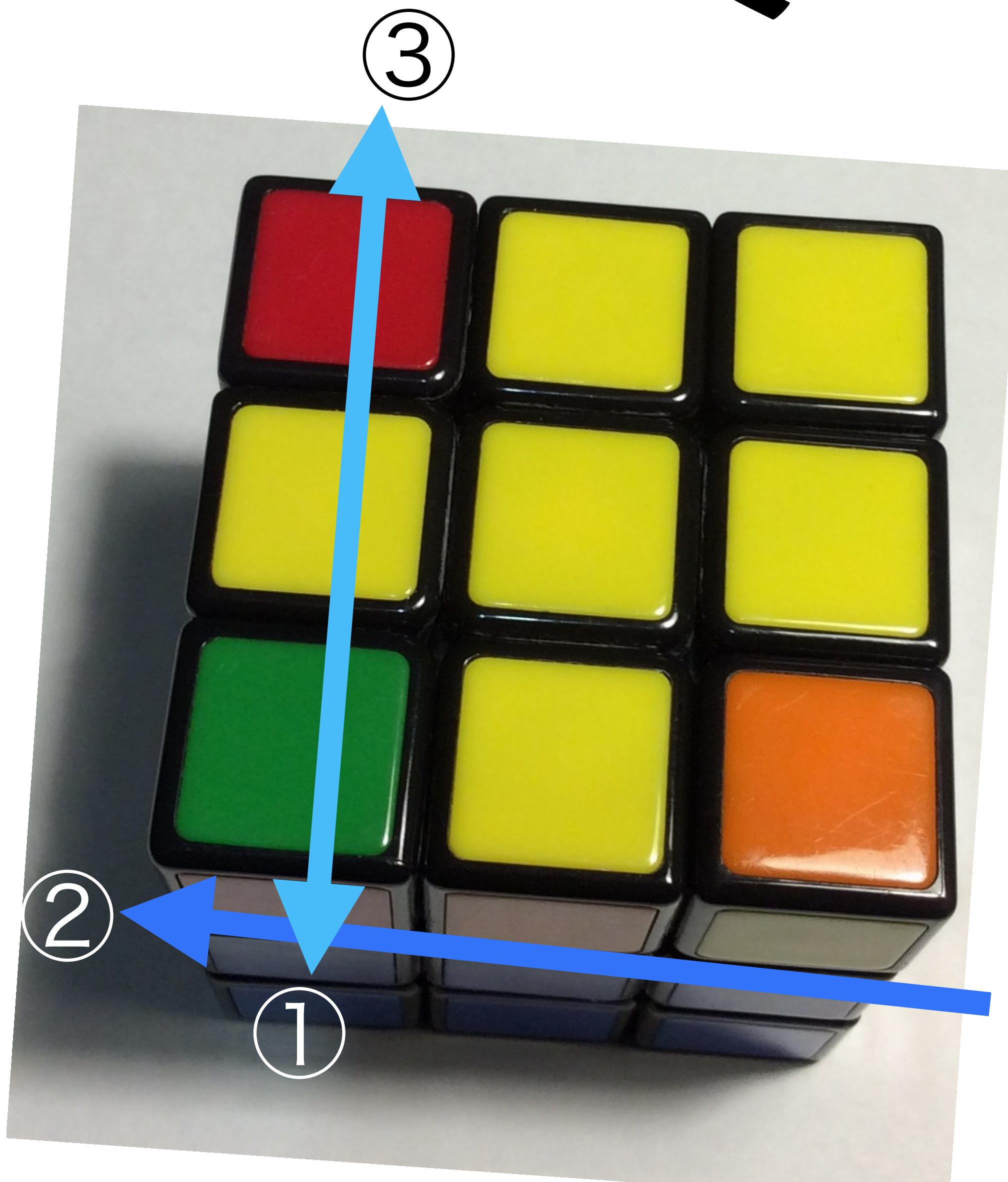
中央にクロスができるまで
Bを繰り返す



1層、2層に変化なし

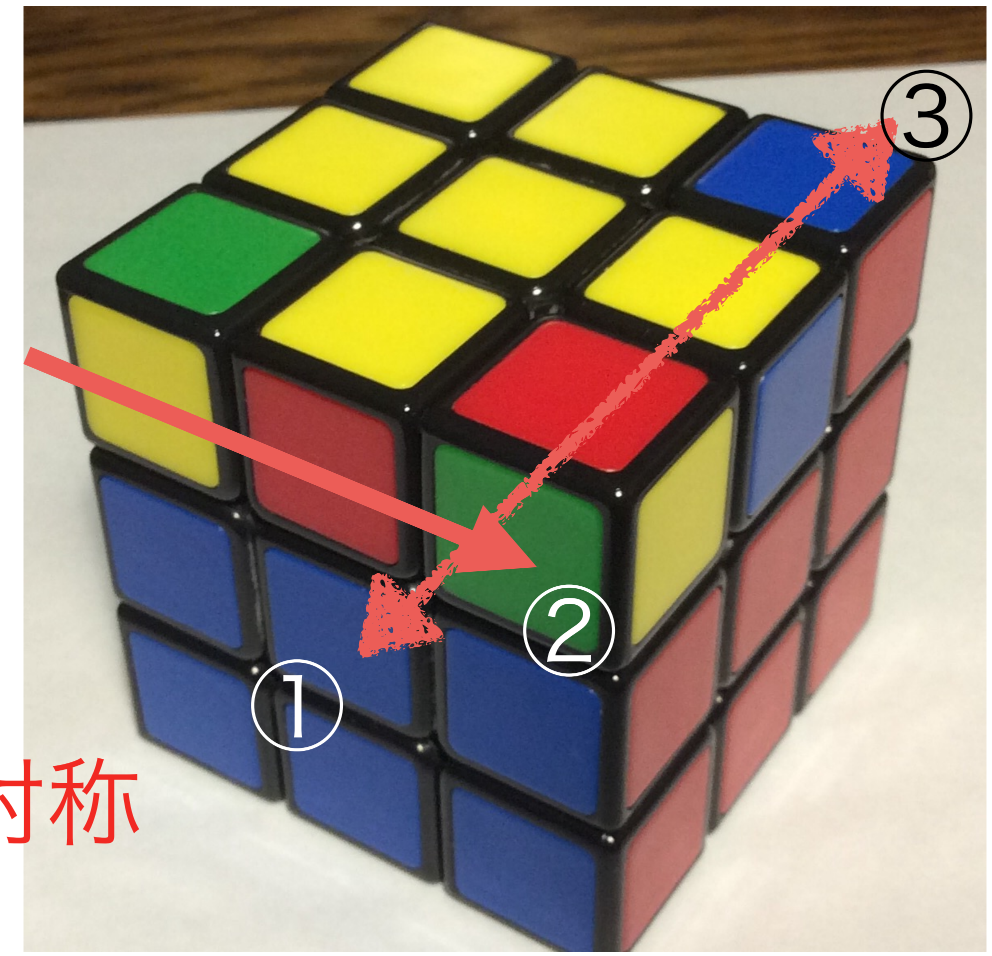
3層目のコーナーを揃える

C'の対象



L U l U L U^2 l

鏡映対称



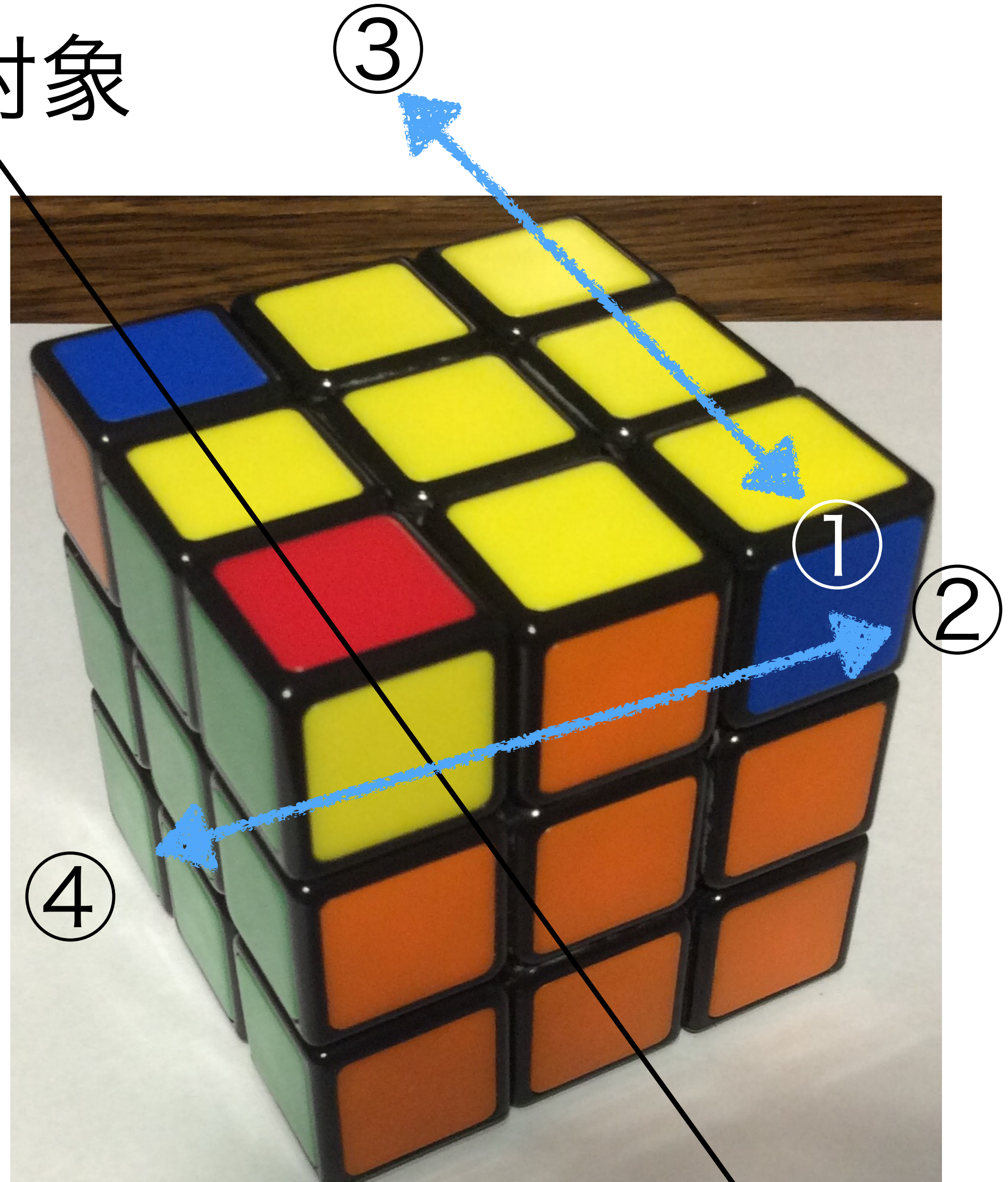
r u R u r u^2 R

Cの対象

※ 1層目、2層が壊れたときは、操作に誤り

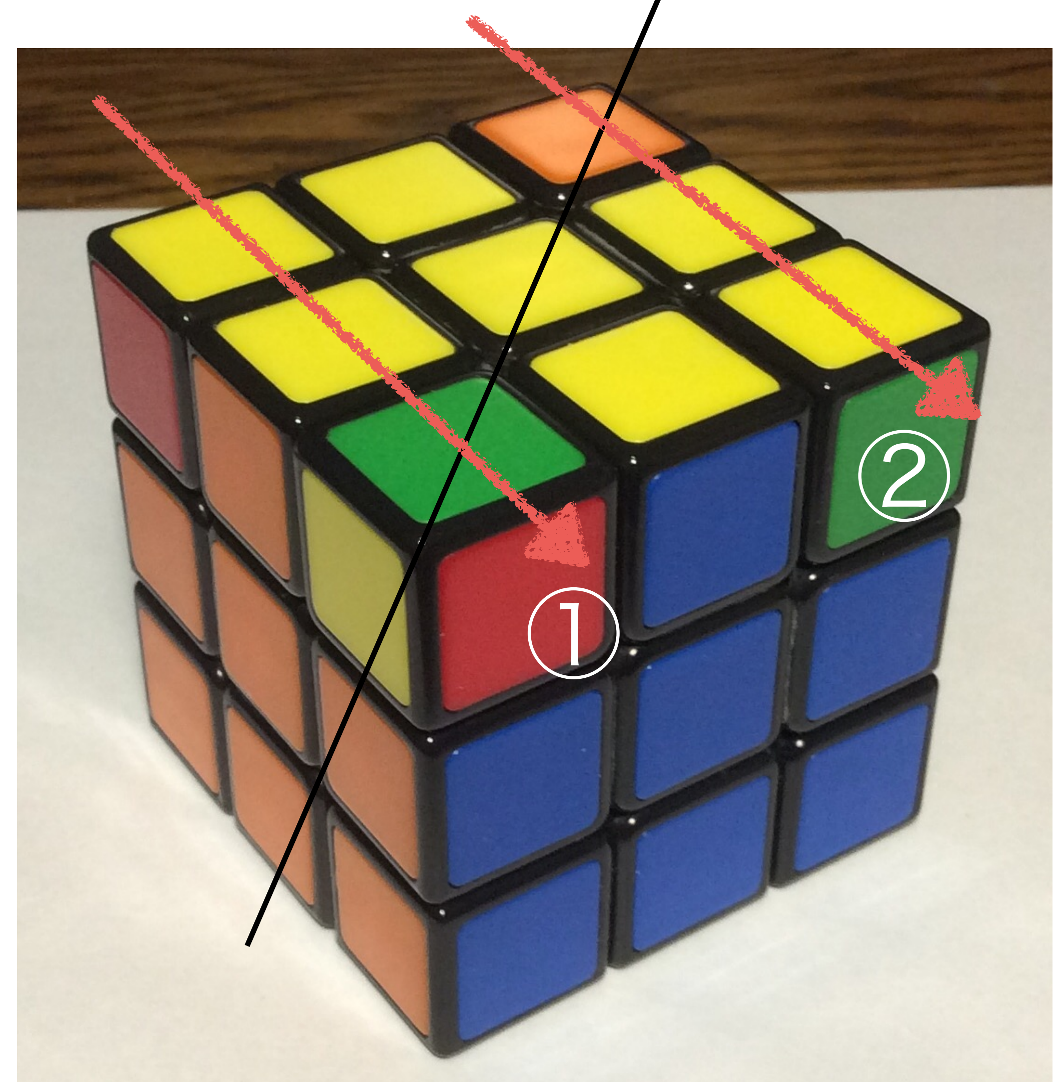
3層目の上面を揃える(2)

Dの対象



r u R U L u r U R l

Eの対象

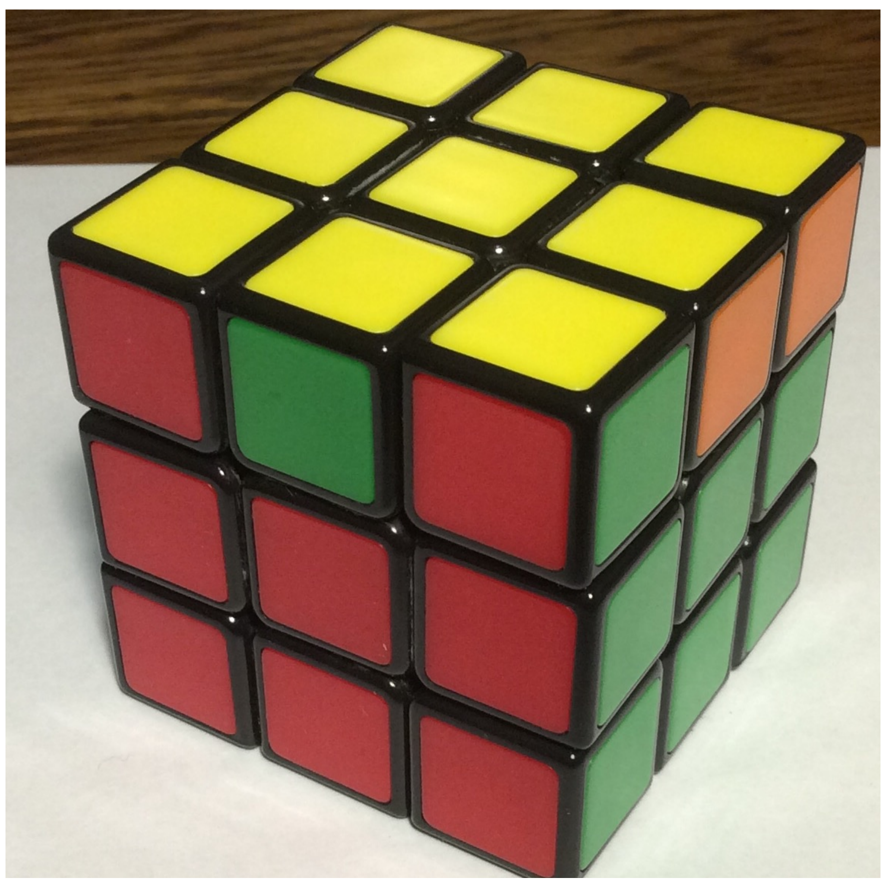


L r U l u R U L u l

※ 1層目、2層が壊れたときは、操作に誤り

上面が揃ったら、エッジピースを入換える

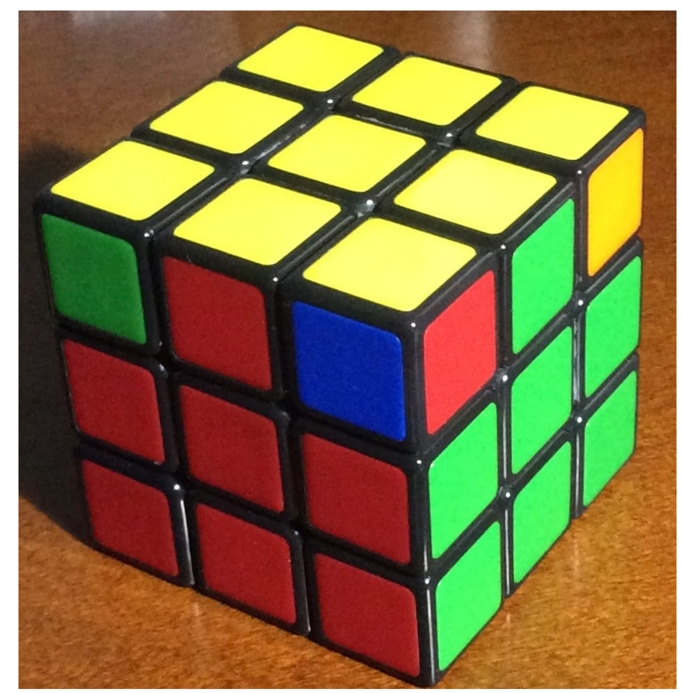
1面が揃っている
Dの対象



r u R U L u r U R l

または、- b r f R B r F R

揃っている面が1面もない
Eの対象



L r U l u R U L u l

または、+ b r f R B r F R

D, Eの覚えかた

記号で覚えるのが苦手な方は、この時計回り、反時計回りのリズムで覚えると良い
もちろん、記号で覚えられる場合は、記号で覚えて良い

D

R	L	R	L	R	L
	❶	❷	❻	❽	❿
		❸	❼	❾	
		❹			
		❺			

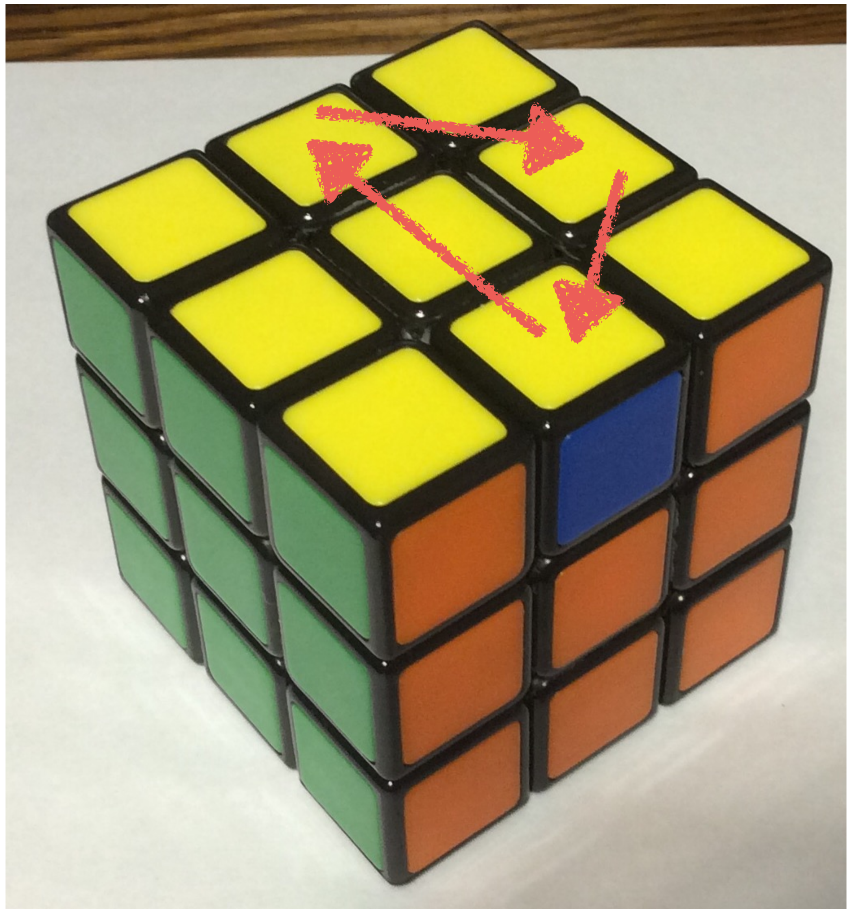
E

R	L	R	L	R	L
❶	❷	❸	❹	❻	❾
			❺	❼	❿
				❽	

完成直前の2例

偶置換(2回)の入れ換えを残す

Cur



時計回り/反時計回り置換

R^2 **U** s U^2 S **U** R^2

R^2 **u** s U^2 S **u** R^2

Cross

十字での置換

R L U ^2 r l **f b** U^2 F B

交換子(コミュテータ)とマクロ

Commutators and Macros

A: U R u r F r f R
A': u l U L f L F l

B: r u f U F R

C: r u R u r u^2 R
C': L U l U L U^2 l

D: r u R U L u r U R l
E: L r U l u R U L u l

F: r f R b r F R B
G: b r f R B r F R

0 face: E and then D
4 faces: C and then + C'
1 face: D and then ++ E

Inter: B^2 L U l B^2 R d R D R^2

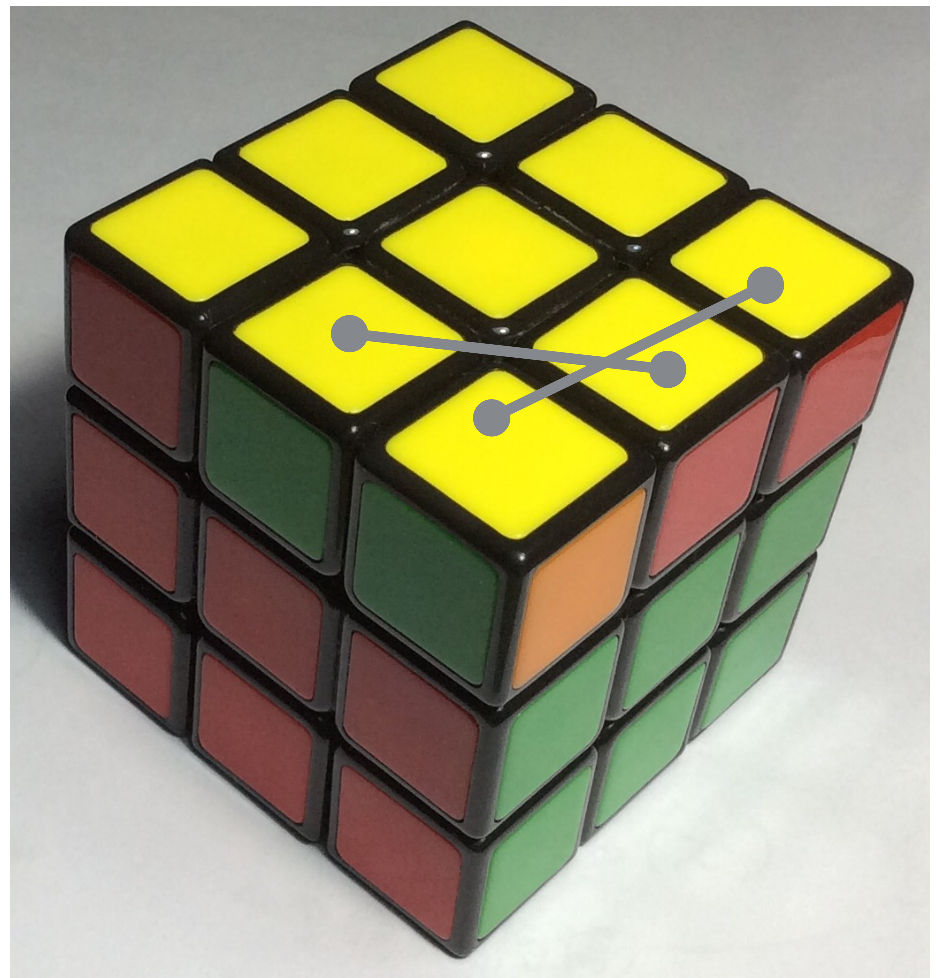
Cross: R L U^2 r l f b U^2 F B

Cur +: R^2 u s U^2 S u R^2
Cur - : R^2 U s U^2 S U R^2

S. Kusafusa

http://imetrics.co.jp/academy/Rubik's%20Cube.pdf

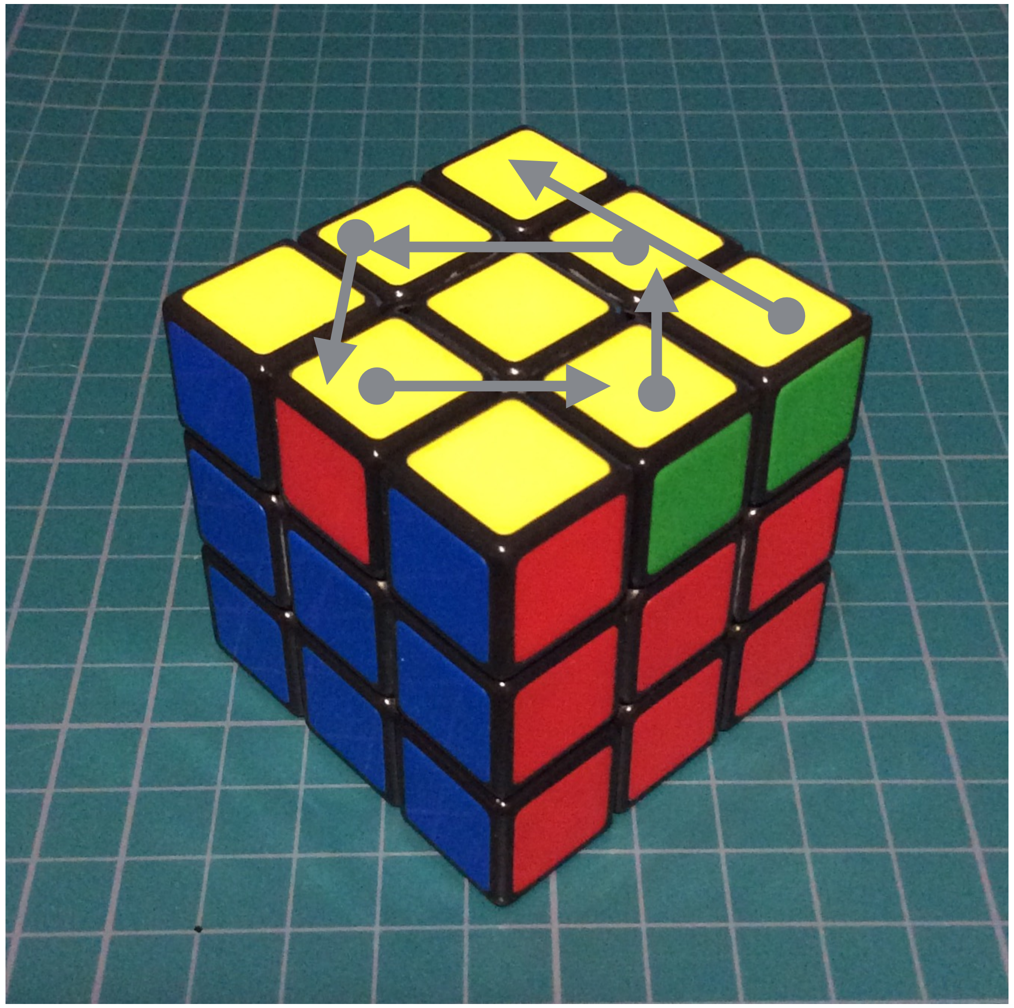
少しショートカット(PLL)も使おう



B^2 L U l B^2　R d R D R^2

新しいマクロを見つける

６面揃ったところから、
Dと +E を行うと上の配置になる



上の配置からから一気に完成するには、前頁の

B^2 **L** U l B^2　R d **R** D R^2

と、次のCurマクロで

R^2 **U** s U^2 S **U** R^2

さらにマクロをみつける

図は時計回り

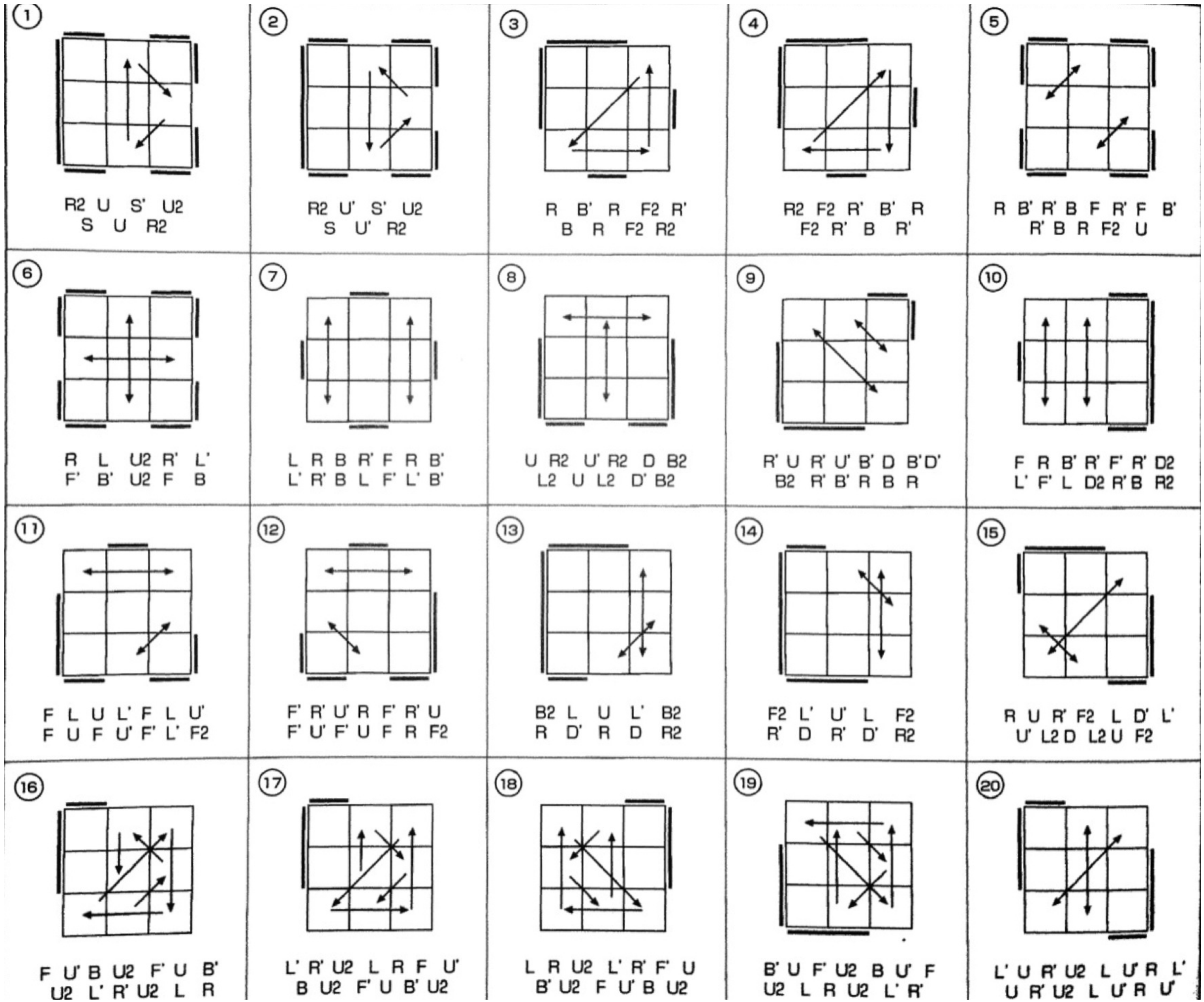
時計回り

R^2 F^2　r　b　R
F^2　r B　r

反時計回り

R　b　R　F^2　r
B R　F^2　R^2

The PLL method on 3rd tier



※反時計回りをR'のように表示していることに注意

Appendix

Advanced methods

Sage 群論ソフトウェアで解法の検証

巡回群の話し

G = {g0, g1, g2, g3, g4, g5}

が群となるならば、g6 = g0

Gは、位数6の巡回群をなす

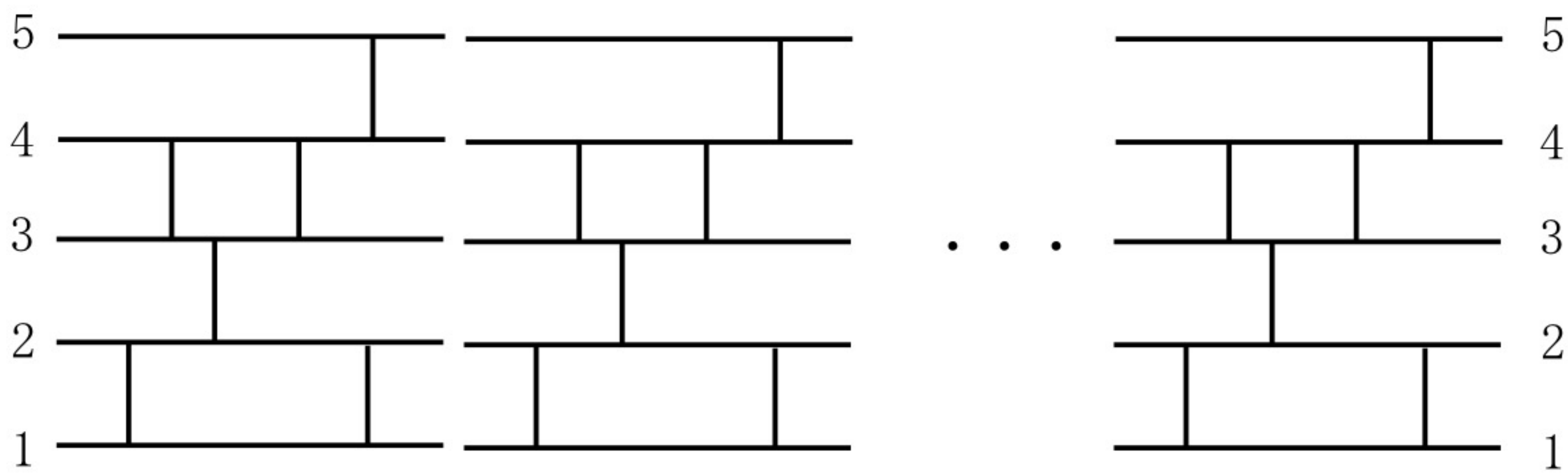
位数が素数の有限群は巡回群になる

注意:この逆は成り立たない

フェルマーの小定理
p を素数とし、a は p の倍数でない任意の整数とする。
このとき、a^p–1 を p で割った余りは 1 である。

巡回群とは

有限群 G について、|G| = n ならば任意の g ∈ G に対して g^n = e が成り立つ。



同じものを５！ 個つなげると、必ずもとの位置に戻る。

縦の棒が n 本あるあみだくじを考えると、これに n 次の対称群 S n が対応する。
|S n| = n! であり単位元は数字をまったく入れ換えないようなものであったから、
巡回群の主張は、同じ構造のあみだくじを n! 個接続すればどこからスタートしても最初の真下の場所にたどり着く。

解説 imetrics.co.jp/math3/Appendix.pdf

巡回群

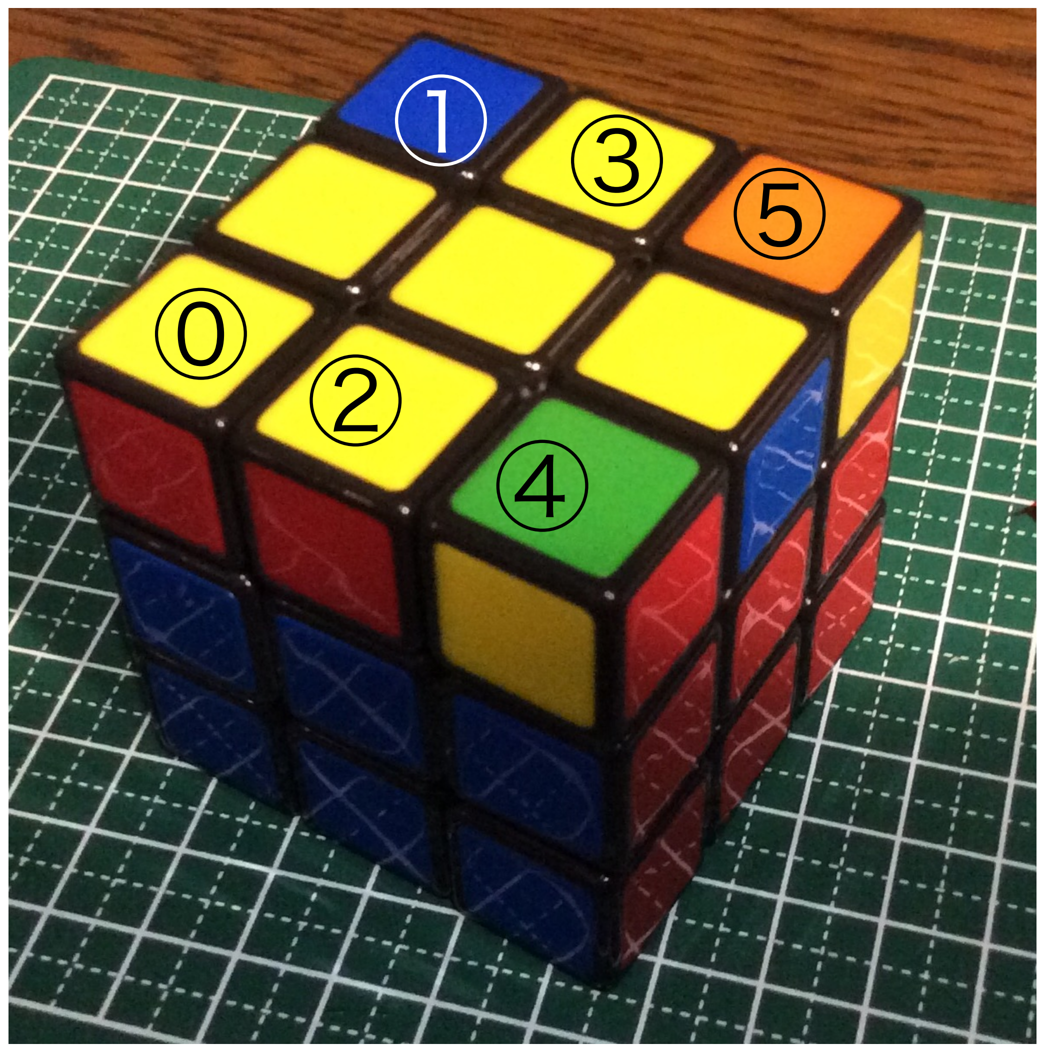
Cは、6回の繰り返しで元に戻る

繰り返し回数は、揃っていないピースの数に等しい

位数6 の巡回群の例では、6=2^1・3^1

⟹

C



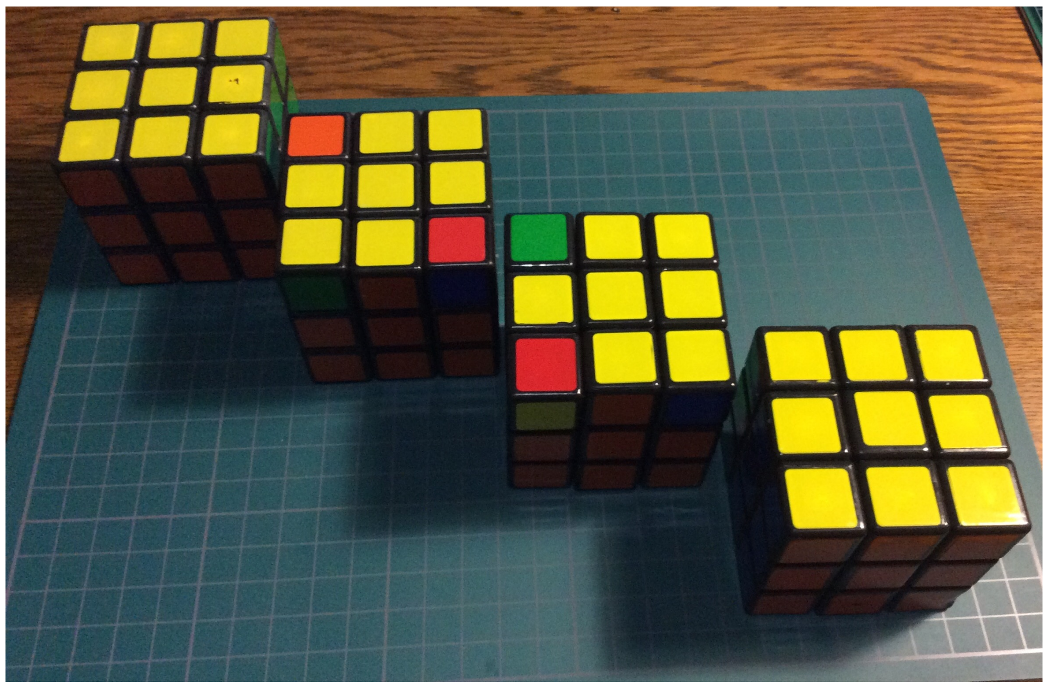
⟹

C'

1、2、3、5、7、11、13、17．．．

ルービックキューブは、巡回群である

DとEは、3回の繰り返しで元に戻る



BとCは、6回の繰り返しで元に戻る

位数5、7、11の例

位数 11 の操作：(r U f L)^3

位数 7 の操作：(D^2 R)^2 (U^ 2 L)^2

位数 5 の操作：r U R U

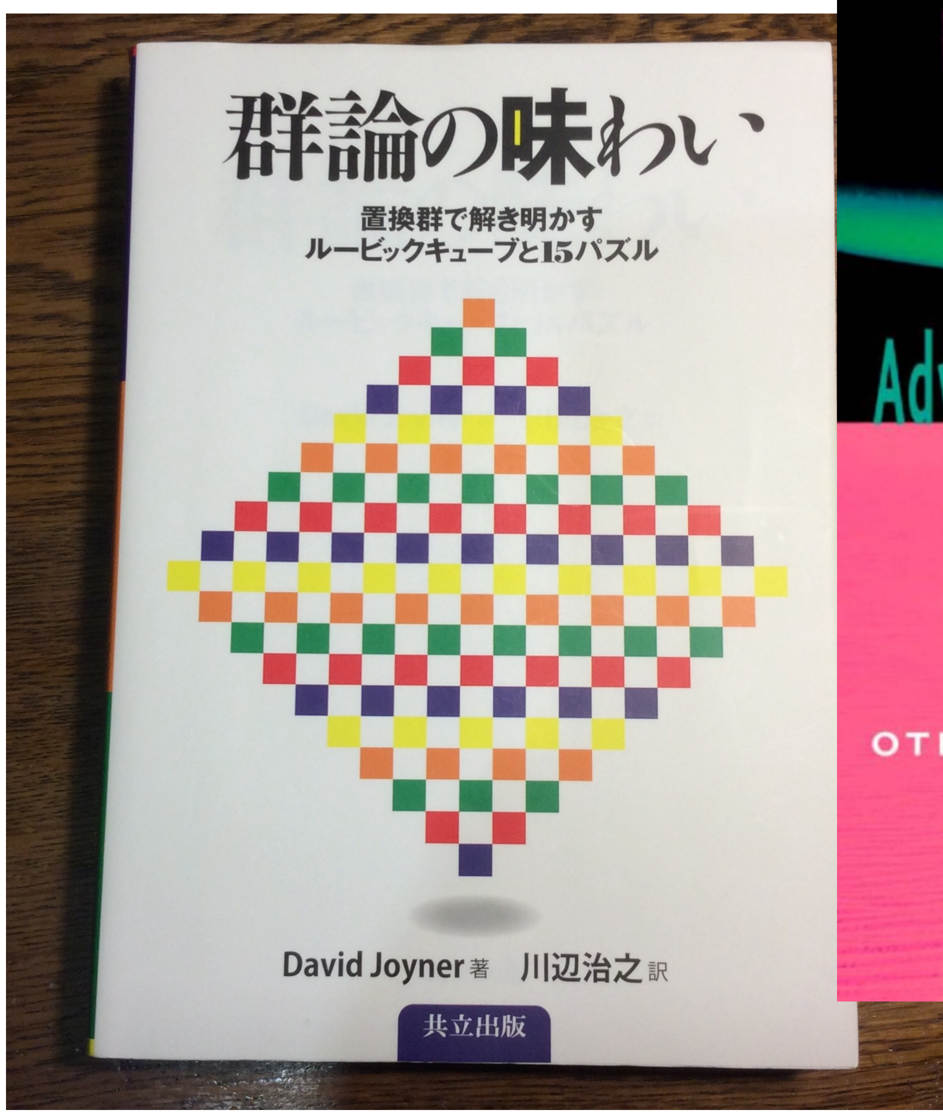
置換群と巡回群を理解する
その上で、練習は熟達の道

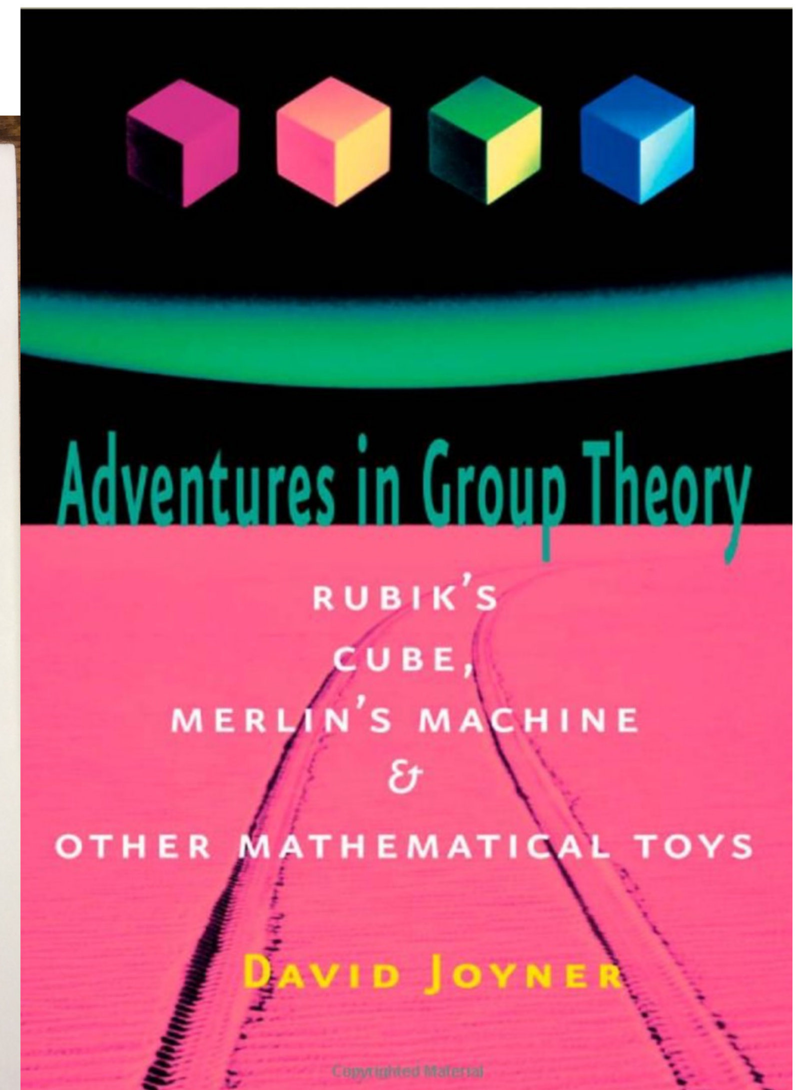
"Understanding the cyclic and permutation"
Then
"Practice makes perfect"

galois@imetrics.co.jp

Saige. Kusafusa

参考書　置換群で解き明かすルービックキューブと15スライドパズル





Bounds on Solving a Rubik's Cube

The number of possible permutations of the squares on a Rubik's cube seems daunting. There are 8 corner pieces that can be arranged in 8! ways, each of which can be arranged in 3 orientations, giving 3^8 possibilities for each permutation of the corner pieces. There are 12 edge pieces which can be arranged in 12! ways. Each edge piece has 2 possible orientations, so each permutation of edge pieces has 2^{12} arrangements. But in the Rubik's cube, only $\frac{1}{3}$ of the permutations have the rotations of the corner cubies correct. Only $\frac{1}{2}$ of the permutations have the same edge-flipping orientation as the original cube, and only $\frac{1}{2}$ of these have the correct cubie-rearrangement parity, which will be discussed later. This gives:

$$\frac{(8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12})}{(3 \cdot 2 \cdot 2)} = 4.3252 \cdot 10^{19}$$

2

※ 1京は10の16乗だから、10の19乗は1000京と読む

possible arrangements of the Rubik's cube.

It is not completely known how to find the minimum distance between two arrangements of the cube. Of particular interest is the minimum number of moves from any permutation of the cube's cubies back to the initial solved state.

Another important question is the worst possible jumbling of the cube, that is, the arrangement requiring the maximum number of minimum steps back to the solved state. This number is referred to as "God's number," and has been shown (only as recently as August 12 this year) to be as low as 22.[1] The lower bound on God's number is known. Since the first twist of a face can happen 12 ways (there are 6 faces, each of which can be rotated in 2 possible directions), and the move after that can twist another face in 11 ways (since one of the 12 undoes the first move), we can find bounds on the worst possible number of moves away from the start state with the following "pidgeonhole" inequality (number of possible outcomes of rearranging must be greater than or equal to the number of permutations of the cube):

$$12 \cdot 11^{n-1} \geq 4.3252 \cdot 10^{19}$$

which is solved by $n \geq 19$.

The solution mathod we will use in class won't ever go over 100 moves or so, but the fastest "speedcubers" use about 60.

4x4x4 Revenge

不動点を持たない、4x4x4偶数キューブ

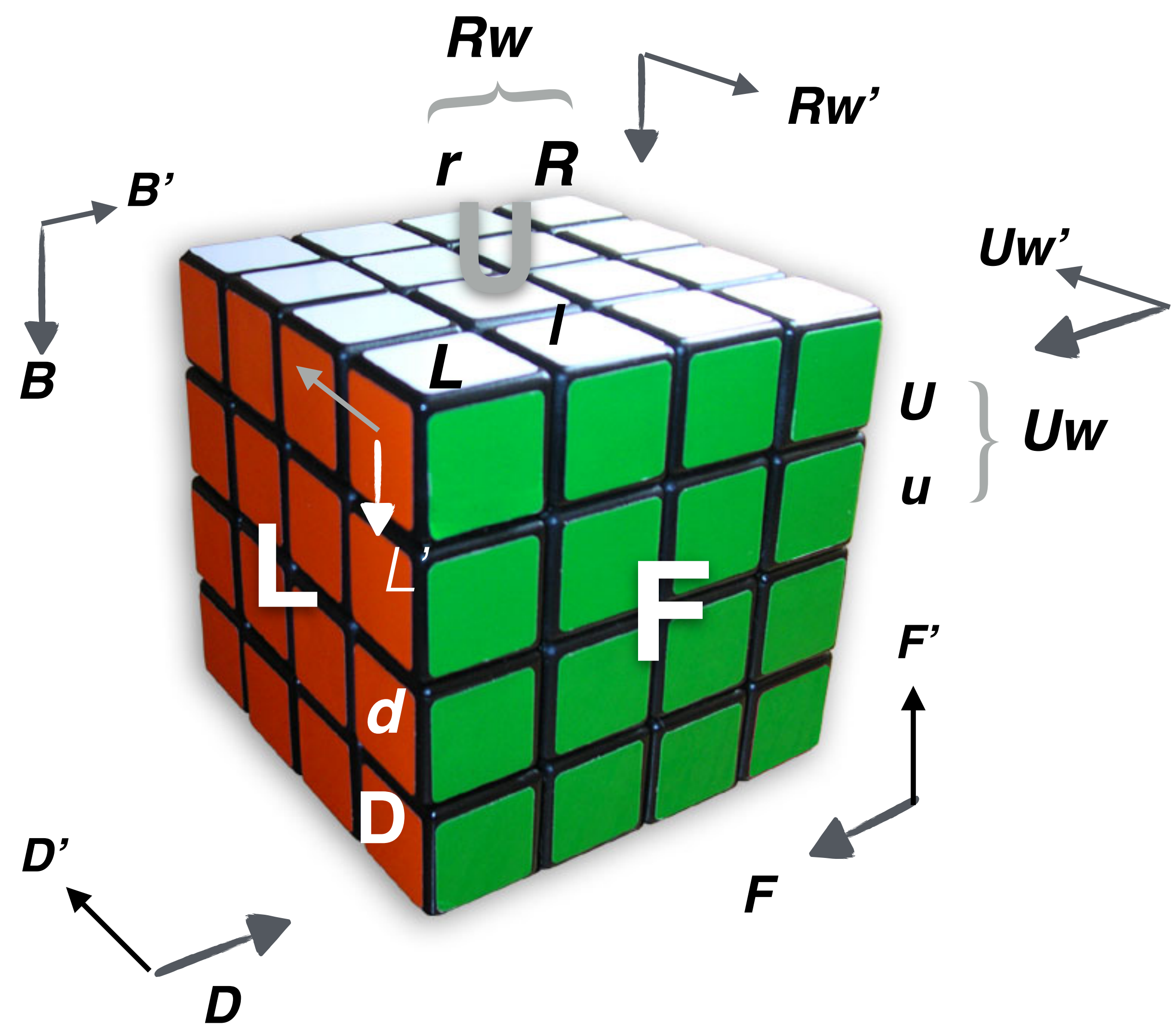
4x4x4 Revengeの解法戦略

Step1 最初に、コーナーとエッジを無視して、任意の1面のセンターに2x2(白)と、
その対面に2x2(黄)をつくる.
上の2面を側面にし、1面の中心に2x2(青)と、その隣面に2x2(赤)をつくる.
さらに、その隣面に2x2(緑)をつくると、残った面は、必ず、2x2(橙)になる.
6面の中央に、2x2面がすべてが正しい配置に置けたら、次のステップへ.

Step2 2x2エッジのペアリングを、つくっていく.
白と他色のペアリング4組を先ずつくり、白面のコーナーをはめ込みむ
底面のエッジ以外に、ペアリングのできているエッジは、3x3Cubeの要領
で縦軸のエッジを揃えていく.
アルゴリズム配置は、次のスライドを参照
残り2組のペアリングを残したら、最後の2x2ペアペアリング・アルゴリズ
ムを使って、すべてのエッジのペアリングを終える.

Step3 この段階で、4x4x4Revengeは、3x3x3 Cubeとみなせる.
したがって、この後は、OLl、PLLで完成する.
ただし、ここでパリティが1個あるいは2個発生したら、パリティ解除
アルゴリズムを使って解除する.

記号の意味



凡例

R **r** : clockwise
R' **r’** : anti clockwise
R2 : Rotate twice

Revenge攻略アルゴリズム (Sage method)

<Making faces>
Rw U' Rw' / Rw' F' Rw F / Rw U' Rw'

(対面入替ショートカット)

並列: d 2 B 2 d !2. クロス: d 2 F B d 2

Г字 :d 2 F ' d 2   (d 2 F ' B 2 d 2)

※ 記号の凡例が変わっていることに注意

反時計回りは、小文字でなく、' を使用

^2 は、^を省略

小文字は内側(センター側)の列を指示

wは2列をまとめて回転することを指示

<**Paring edges**>
F R ' F ' R
L ' F U ' L F   d R U ' R ' d '

※ 記号の凡例が変わっていることに注意

反時計回りは、小文字でなく、' を使用

^2 は、^を省略

小文字は内側(センター側)の列を指示

wは2列をまとめて回転することを指示

<The last two edges>

(クロス: L ' F U ' L F)

平行: d R F ' U R ' F d '

<**Parity**>
(Flip flop one edge = pure OP)
r2 B2 U2 l   U2 r ' U2 r   U2 F2 r F2   l ' B2 r 2

(Two adjacent edges)
R' U R U'   r2 U2 r2 Uw2   r2 Uw2 U' R'   U' R

Parity問題

偶数4x4x4 RevengeにはParityがある. 正確には奇数3x3x3 Cubeの場合に相当する配置である.
PLL法で4層を完成させようとしても、置換群とならないので解けない.
3x3x3のパリティは、ピースの配置が物理的に不正な位置に入れ替わっているときに発生する.

一方、Revengeには一面体のセンターピース(不動点)が存在しないのであるから、自由度が高く、Parityが高い確率で発生する．しかしながら、物理的にピースの入替なく、エッジのペアリングを組み戻すことで最終的に正常な配置に戻せる.

※この配置(パリティ)は、
ペアリングを解かない限り、
置換群が存在しない

数学体験教室

問い合わせ: ~~galois@imetrics.co.jp~~
galois157@gmail.com