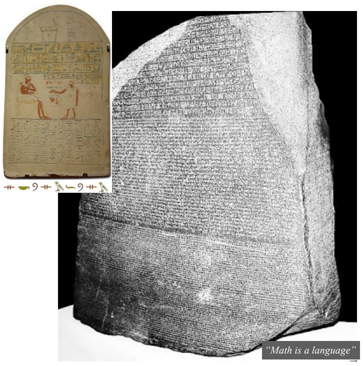
数学とは言語



Category theory is a common language with other sciences such as software science and natural sciences.

Author: S. Kusafusa
Production：iMetrics.co.jp (Japanese/ ENGLISH)

ISBN978-4-9905323-9-0 C3841

AI 時代の数学

(層・圏論・そしてトポスへの道のり)

Author: S. Kusafusa
Production：iMetrics.co.jp (Japanese/ ENGLISH)
Copyright © imetrics all rights reserved

Math obsession

リタイヤ後に数学をしたい人は少なくない. 以前から数学に興味を持っていながら,また数学を学ぶことはきっと楽しいだろうと気づいていながら,日常の忙しさの中では数学の本を手に取る機会がなかったのかもしれない. 実際のところ,数学の楽しさはリタイヤ後の生活に適している. 自由な時間をもてることが考え続ける楽しさを与えてくれる. そんな人に、最近の**コンピュータと共にある数学**, **AI時代**の背景にある科学の共通言語である**圏論**と**トポス**, 新たな普遍的論理学に至るまでの道のりについて, 話題を**俯瞰的**に提供しよう.

Sage Kusafusa
2019. 6. 21

Common ground

現代数学の哲学的なトピックスから, 話を始める.
そんな話しを集約していくと, 話題が人工知能AIのトピックスに繋がっていく.

20世紀中頃, Lawvereらにより圏論が導入された.
1975年頃, トポスによる新しい数学への統合がLawvere とTierney によってなされた.
トポスが 直観主義高階論理を具体化している.

Andre BoileauとAndre Joyalは1981年の論文で, さらに代数幾何, 微分幾何, 解析幾何, 代数的位相幾何, ホモロジー, コホモロジー, ガロアの理論への広がりを指摘している.

21世紀の数学は, コンピュータとともにある. すべての科学の礎である数学は, ソフトウェアサイエンス, モデル理論, 数理論理学, 言語学と併せて発展している.

Agenda

① 数学とは何か？　数や空間は, 代数幾何学的には**多項式**でできている.
どんな視点・抽象化が, 科学のブレークスルーに役立つだろうか.

②コンピュータ主導の数学が, 科学アプローチのパラダイムシフトを推進している.

③数学の構成を考える. 現代的には, 圏論がクラシカルな集合論と位相に代わって数学を構成する. 現代的集合像である、層・圏・トポスを紹介する.

④AIには非記号的AIと**記号的AI**がある. 前者には**統計的AI** (ビッグデータ・データマイニング・P-値・ベイズ統計), 多重ニューラルネットワークによるディープラーニングがあり産業的に成功している. さらに,トポス圏論的論理による**記号的AI**の研究を深め融合していく.

⑤トポス(直観主義論理の圏論的論理)、圏論的普遍論理学へと言及する.
双対性は述語論理・集合論の圏論的意味論である.

第1章の要約

1章. 不易流行 (空間の認識)

"**不易**を知らざれば基たちがたく**流行**を知らざれば風(ふう)新たならず"
不易 とは, 時が経っても変わらないもの (= **不変量** *invariant*)
流行 とは, 変わらねば進化なし (= 温故知新 *outbreaks*)

微分は未来, 積分は過去 →**温故知新**は積分方程式
ラプラス変換, 合成積, たたき込み

"数学とは, 違うものに同じ名前をつける芸術だ"　ポアンカレ
"*Mathematics is the art of giving the same name to different things.*"

不変量の例, ガウスの曲率, オイラー数, コホモロジーの核/ 像, 固有値, GW, ジョーンズ多項式. . .

"大海に島もあらなくに海原のたゆたふ浪に立てる白雲" (万葉集 巻7-1089)
(混沌とした宇宙に似たものの存在を感じる)

数学とは, 三世因果を見据えること

“月日は百代の過客にして行きかふ年もまた旅人なり”

The days and months are eternal travelers, and the coming year is also like a traveler.
namely, everything is passing through around him.

未来をみるのが **微分**、過去をみるのが **積分**
両方みるのが **積分方程式**

時間から周波数へドメイン変換
ラプラス変換、合成積 (たたき込み)


Janus


Bashō Matsuo, looking at the sea of Izumozaki

7

数学とは、不変量を見いだすこと

“**不易**を知らざれば基たちがたく
流行を知らざれば風(ふう)新たならず”

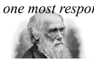
“It is hard to stand if you do not know the invariants.
If you don't know the variants, it' won't be new.”

不易 ***Invariant*** & 流行*variants*

「蕉門に千歳不易の句, 一時流行の句と云ふ有り.
是を二つに分て教へ給へる, 其元は一つ也.
不易を知らざれば基たちがたく, 流行を知らざれば
風新たならず」 - 去来抄


向井 去来

“It's not the strong species that survive nor the most intelligent,
but the one most responsive to change." - Charles Darwin



8

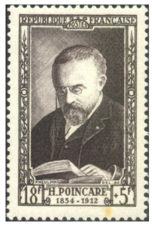
数学とは、抽象化

“Les mathématiques sont l'art de donner le même
nom à différentes choses.” - *Jules-Henri Poincaré*

"Mathematics is the art of giving the same name to different things."
“数学とは、違うものに同じ名前をつける芸術だ” ポアンカレ

抽象化の中から**不変量**を見つける . . .

ガウスの曲率、
オイラー数、
コホモロジーの核/ 像
グロモフ-ウィッテン(GW)不変量
ジョーンズ多項式
小平次元
モチーフ
.



10

数学とは、似たものを探すこと

“大海に島もあらなくに海原のたゆたふ浪に立てる白雲” (万葉集 巻7-1089)

Instead of not seeing the islands in the ocean, white clouds build up in the waves.

混沌とした宇宙の中に、似たものの存在を感じる

コホモロジーの世界
は**連続性**を追いかける

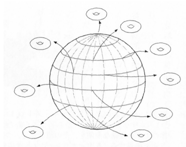

岡潔


16,000 feetからのスナップ

11

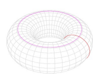
Coffee break

代数多様体と分類

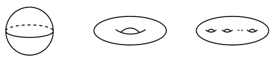


地図 = 多様体


ユークリッド空間


トーラス

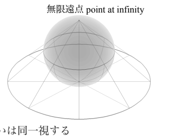
1次元代数多様体の分類



曲率が正(球)、ゼロ(トーラス) 、負(穴が2個以上開いた曲面)
穴を埋める操作がコンパクト化

トーラスの高次元化が、**カラビーヤウ多様体**
複素3次元、6次元空間

無限遠点 point at infinity



リーマン球面は、**複素平面**で包んだ
球面として視覚化

商空間 (*quotient space*) :空間のある種の点の集まりを貼合せ gluing togetherあるいは同一視する

12

第1章-2の要約

（2）空間の認識-その２

空間は**多項式**でできている . . . 代数幾何

$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots$　ワイルの部屋

位相幾何学的な**不変量** ベッチ数に隠された**巾指数**は,

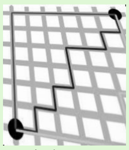
高次元鏡映群の不変量

空間は関数である . . . ⇨　数(点)、関数、層、空間

数は**多項式**でできている

1 = 0.999999…….

数も関数である



Taxicab geometry

（3）**極限と無限,**　タクシキャブ・ジオメトリ

“*The infinite we shall do right away, The finite may take a little longer.*” - *Ulam*

“すぐに手を打たねばならないのが無限ちょっと長くかかるのが有限”　ウラル

群盲象を評する

Blind men and elephant

木を見て森を 識ることができるだろうか？

$$\frac{\text{核 kernel}}{\text{像 image}} = \text{法 mod}$$ 共通なもの

つないでいけば、全体の様子がうかがえる.

図形は、計算できる

図形は、論理である

コホモロジー Cohomology の世界

使われている全てのコホモロジーは、みな導来関手

Blind men and elephant

初等数学の対象は、**数と図形**、{目の前の物体や生き物}

現代数学の対象は、**微小**と**極大**、{素粒子や遺伝子、宇宙である}

このような世界を扱うには、**集合**として構成し、**位相**をという情報を付け加えた.

“集合と位相”という礎から数学を構築

集合と位相；　**代数多様体**、位相多様体・可微分多様体、

⇓

木を見て森を識る森を見て木を識るには、集合概念を拡張して**“層”**を導入

数論多様体、コホモロジー

代数多様体の**連接層の導来圏**

⇓

集合から関数的な関係に注目し、**“圏論”**で数学を再構築

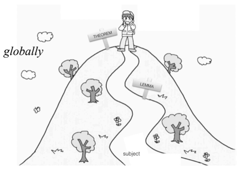
数も関数である

代数幾何学と直観論理、圏論、トポスへ

木を見て森をしる、森を見て木をしる

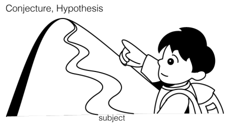
See the trees for the forest, See the forest for the trees

globally



コホモロジーと層 ・前層

Conjecture, Hypothesis



locally

より形式的に,

大域から局所への移行のみを考える概念は, **前層** presheaf

層 sheaf は**コホモロジー**であり, ベクトル束であり、多様体である.

コホモロジー cohomology を用いて局所を大域へ

全てのコホモロジーは, **導来関手** Derived functor である.

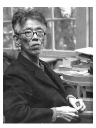
層 sheaves

位相空間上で連続的に変化する様々な数学的構造をとらえるための概念.

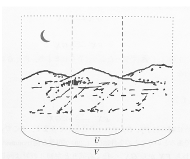
大域的なデータを局所的に取り出すこと.

局所的なデータの貼り合わせの可能性によって定式化される.

前層 presheafであって、貼り合わせを満たすものを層sheafと呼ぶ.

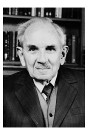


岡潔



前層を重ねて層　加藤五郎、コホモロジーの心から

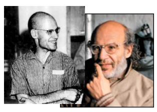
J. Leray



層の歴史

層の概念が最初にはっきりと現れたのは、第二次世界大戦中のジャン・ルレーによる偏微分方程式の研究だと言われている。その後、アンリ・カルタンのセミナーで形式的な整備が進められた。さらに任意の係数体上の多様体にコホモロジー理論を構築することを目的の一つとして、1955年にジャン=ピエール・セールによって代数幾何学に層の概念が持ち込まれた。アレクサンドル・グロタンディークによりこの考えが推し進められ、**スキーム上有意義な「層」を表現しうるトポスの概念が得られた**。ほかに層が決定的に用いられる理論として佐藤幹夫らに端を発する偏微分方程式系の解析（D-加群の理論）があげられる。

Jean-Pierre Serre,



Alexander Grothendieck

佐藤幹夫

グロタンディーク

Tateno, Kakioka といえば, 気象専門家なら, これらの地点が「つくば」,「石岡」にあることを知らずとも, 正確に地球表面上の点として指摘できる.

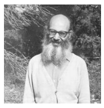
Tohokuも同様だ. Tohoku,1957年「東北数学雑誌」に出版された “Sur quelques points d'algèbre homologique (ホモロジー代数のいくつかの点につ いて)” の通称である. 専門家なら, Tohoku大学が仙台にあることを知らずとも, **グロタンディーク** Alexander Grothendieck の Tohoku で通じる。
この論文で, **層** · **圏** · **コホモロジー**という, 20世紀の抽象数学の特徴的な問題が扱われた. これらは, グロタンディーク以前に, ルレー, カル タン, アイレンバーグ, マックレーンによって導入され研究されていたが, この論文によって, これらの理論が一新された.

March 28, 1928 – November 13, 2014

グロタンディーク (2)

リーマンに由来する**空間とは何か**という問いには, カルタンにより, 局所環つき空間とよばれる, **環の層のついた位相空間である**, という答えが与えられていた. しかし, そのような空間を調べるための基本的な道具である **層係数コホモロジー**については, 実多様体のような局所コンパクト空間についてはともかく, 一般の位相空間でどう扱えばよいのか, 分かっていなかった.

これを, グロタンディークは, Tohokuの中で, **アーベル圏**の理論を構築することで鮮やかに解決した. これは, **スキーム**の理論の基礎を与えるとともに, のちのエタ ール · コホモロジーへの道を開くものだった.
グロタンディークはコホモロジー群よりも, そのもとになる複体を重視する**導来圏**のアイデアも提供していた. その導来圏は, **ミラー対称性**につながっていく.



March 28, 1928 – November 13, 2014

前層と層

定義域全体での関数の連続性は各点で連続なことと同値だ. 微分可能性でも実解析性でも正則性でも同じだ. 各点ごとの振る舞いを束ねることで大域的な様子もわかることを指している.

層を定義する.

(前層)

位相空間の圏を **Top**, 集合の圏を **Sets** とする.
Top から **Sets** への**反変関手**contravariant functor を**前層**と呼ぶ.
X を位相空間とし *U* を *X* の開集合とする. 全ての *F*(*U*) が群・環・線型空間などの代数構造を持ち制限写像が準同型になって いるなら, *F* はそれぞれの代数構造に合わせて群, 環, 線型空間などの層sheafまたは前層 presheafという.

大域から局所への移行のみを考える概念は**前層** presheaf という.

(X, T) を位相空間とする。X の開集合 $U \in T$ に対し集合 $F(U)$ を対応付けるとき、開集合の包含関係 $U \subset V$ に応じて制限写像 $\rho U,V : F(V) \to F(U)$ が定まり、次の条件が成立する

$$\rho_{U,u} = identity$$

$$U \subset V \subset W \Rightarrow \rho_{U,w} = \rho_{U,V} \cdot \rho_{V,w}$$

そのとき集合と写像の族 $F = \{(F(U))_{U \in T}, (\rho_U{}^V)_{U,V \in T; U \subseteq V}\}$ を X を**底空間**といい、その集合に値を持つ写像の族を**前層**（または簡単に X 上の集合の前層）と呼ぶ.
各開集合 U に対応付けられる $F(U)$ がどれも加群の構造を持ち、制限写像がどれも加群の準同型となっているならば X 上の加群の前層、同じく $F(U)$ がどれも環であって制限写像がどれも環準同型ならば X 上の環の前層、といったように $F(U)$ たちのもつ構造によって前層をクラスに分けることができる.

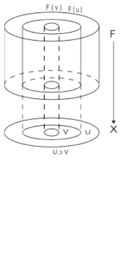
各開集合 U に対して $F(U)$ の元を前層 F の U 上の**切断** *section* あるいは**断面**と呼ぶ.
開集合の包含関係 $U \subset V$ と V 上の切断 $s \in F(V)$ が与えられたとき、$s \mid u := \rho_{U,u}$ と書く。$s \mid u$ を切断 s の U への**制限** restriction と呼ぶ.

層 Sheaves

*X*上の前層F とは, *X*の開集合の圏*Top*(*X*)からのアーベル群の圏*Ab*(X)への反変関手 contravariant functor である.

連接 Coherent

連接 Coherent とは, 有限生成finitely generated のことだ.



導来圏 Derived category

関手$H^n : K(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$は**複体** complex の同型射$f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$. (すべての$f^n$が$\mathcal{A}$の同型射になっている)をホモロジーの同型射 $H^n(f^\bullet) : H^n(X^\bullet) \to H^n(Y^\bullet)$ に移す.
このように,任意のnでホモロジーの同型を導く複体の射を**擬同型**と呼ぶ.
複体の同型射はすべて擬同型だが, 逆は一般に正しくない. 同型なホモロジーを持つ複体どうしは同じホモロジー代数的性質を持つから, もし擬同型がそのまま複体の同型射であるような圏が構成できれば,複体のホモロジー代数を展開する舞台として最も適したものになる. こうして擬同型の逆射を加えて構成される圏が**導来圏** $D(\mathcal{A})$ である. $D(\mathcal{A})$は$K(\mathcal{A})$と同じく**三角圏** Triangulated categoryになる.

導来圏はグロタンディークによって考案され, ヴェルディエによって体系的な理論が構築された. その中ではじめて三角圏の構造が明確に述べられる. 一見,無関係に見える2つの対象でも, 導来圏を通して観察することにより,深い関係性が見出されるということが多く報告されている. 導来圏あるいは三角圏は, このような形で環論や代数幾何学などいろいろな分野で用いられている.

Jean-Louis Verdier

連接層の導来圏

3次元代数多様体の極小モデル理論MMP
特異点の解消
Flip / Flop

1990年代
３次元FLOPにより、連接層の導来圏が同値になる現象が発見
1994年
A. NondalとD. Orlovにより証明

M. Kontsevichによるホモロジカル・ミラー対称性予想
代数多様体の連接層の導来圏と
シンプレティック多様体から定まる深谷圏が等価
超弦理論における対称性、導来圏の対象、深谷圏の対象を
それぞれタイプの異なるD-ブレインとみなす

連接層の導来圏

Derived categories of coherent sheaves

代数多様体 X が 与えられると, その連接層の導来圏 $D^b\mathrm{Coh}(x)$ が定義される.

$$\ldots F^0 \to F^1 \to \ldots \to F^i \to F^{i+1} \to \ldots$$

代数幾何学と他の数学分野との間の対称性が連接層の導来圏を通じて発見された.
非可換環、有限群の表現論との間の対称性(MacKay対応)、行列因子化との対称性(CY/LG対応)

連接層の導来圏を導入した動機は、代数多様体上の**層係数コホモロジーの双対性理論**を一般化することだった.

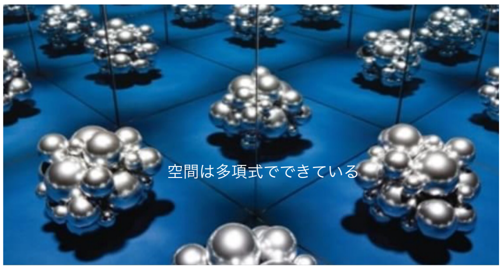
圏論的ミラー対称性

カラビヤウ多様体と呼ばれるある種の代数多様体Xの連接層の導来圏と、
それとミラー対象の関係にある**シンプレティックス多様体** X^v の導来**深谷圏**
$D^b\mathrm{Fuk}(X^v)$の間の**圏同値**を予想

$$D^b\mathrm{Coh}(x) \cong D^b\mathrm{Fuk}(X^v)$$

Coffee break

Multiverse マルチバース



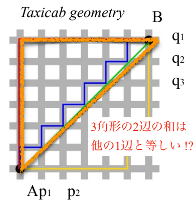
Can Quantum Mechanics Save the Cosmic Multiverse?
A surprising connection between cosmology and quantum mechanics could unveil...
scientificamerican.com

Many cosmologists now accept the extraordinary idea that what seems to be the entire universe may actually be only a tiny part of a much larger structure called the multiverse. In this picture, multiple universes exist, and the rules we once assumed were basic laws of nature take different forms in each; for example, the types and properties of elementary particles may differ from one universe to another. scientific American

極限と無限を考える

ミンコフスキーのマンハッタン距離ともいう.
直交するどのパスを通っても, 1 + 1 = 2 で距離は同じ.
もし, 格子状の道路が限りなく増えたら, √**2** に近ずくか？

NO, **答えは, 2 である**.



$$d_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \| \mathbf{p} - \mathbf{q} \|_1 = \Sigma \,| p_i - q_i |$$

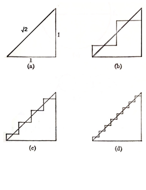
$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots\ldots , p_n) , \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots\ldots , q_n)$$

限りなく道路を増やしても, 3角形の1辺にはならない.

無限個の数を足しても無限にならないことはよくある

タクシキャブ・ジオメトリ パラドックス

極限の直線は直角三角形の斜辺になるから,極限の直線の長さは√2になると考えられる. 図の初めの折れ線L1について考える. 水平の線分の和は1で垂直の線分の和も1である. ゆえに,L1の長さは2である.同様な議論は階段の数を増やしたL2およびL3についても適用される. これらの場合には,それぞれ水平の線分の和は1で垂直の線分の和も1である.それゆえ, L2およびL3もL1と同様に必ず長さは2になる.
さて階段を何段積み重ねるかに関係なく,水平な線分の和は1で,垂直な線L1, L2, L3, L4, ...の長さはすべて2である.そこで**極限**の直線の長さも√2ではなく,やはり2になる.



"The infinite we shall do right away,
The finite may take a little longer." - Ulam

"すぐに手を打たねばならないのが無限、
ちょっと長くかかるのが有限" ウラル

極限を考える

数学のことばで、**限りなく近づく** (*indefinitely*) とはいうが、無限に続く無限 (*infinity*) に近づくとはいわない.

1を3で割り3をかけると、1/3 * 3 = 0.9999999999. . . .
ここで、9が無限に続くとはい わないし、無限小数ともいわない.
9が**循環** recurring decimal するという.
もちろん、限りなく 1に近づくのではなく、0.9999999999. . . **= 1**、厳密に1である.

初等的な証明

$$\begin{aligned} c &= 0.999\cdots \\ 10c &= 9.999\cdots \\ 10c - c &= 9.999\cdots - 0.999\cdots \\ 9c &= 9 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

位取り記数法

$$0.999\ldots = \lim_{n\to\infty} 0.99\ldots 9 = \lim \left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\} = 1$$

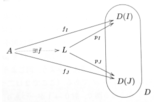
極限 limit

極限には, ① 数列の極限、② 位相空間での極限、③ **圏論的な極限**がある.

数列の極限の概念は, トポロジカルネットの極限の概念にさらに一般化されており, 圏論における極限および直極限に密接に関連している.

圏論的な**極限**とは積や引き戻しや逆極限といった普遍的な構成たちの根底にある性質を捉えた抽象概念である.

双対的な余極限とは, 非交和, 直和, 余積, 押し出し, 直極限のような構成を一般化したもの. 別の言い方をすると、モノを集めて貼りあわせて対象をつくる圏論的構成である



圏論的な極限の定義

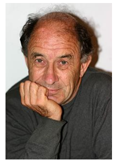
等式 0.999⋯ = 1 を結論することは慣習か, 無限小を考える

"Nowadays, when teaching analysis, it is not very popular to talk about infinitesimal quantities. Consequently present-day students are not fully in command of this language. Nevertheless, it is still necessary to have command of it."

"今日では, 解析学の授業において無限小量について述べることはあまり一般的ではない.
その結果, 当世の学生はこの言葉づかいに全く習熟していない. にも拘らず, 未だにそれを扱うことが必要である."

ライプニッツの連続性の原理は**移行原理**の先駆けである.

"無限小の量へのアイデアが完全に正当なものであり, 古典解析やその他の多くの数学の分科に対する新奇で実りあるアプローチに繋がることを示す.
我々の方法の鍵は, 現代モデル理論の基盤にある, 数学の言語と数学的構造との間の関係の詳細な分析によってもたらされる."


ウラジーミル・イーゴレヴィチ・アーノルド、Влади́мир И́горевич Арно́льд
1937年6月12日 - 2010年6月3日


Gottfried Wilhelm Leibniz

極限という概念

ここでは、コーシー列の極限をいっているが, **圏論的な極限**へと誘導する.

極限とは, 積や引き戻しといった普遍的な構成たちの根底にある性質を捉えた抽象概念である.
双対的に余極限とは直和・押し出しのような構成を一般化したものである.
極限と余極限は, 強く関連した概念である普遍性や随伴関手と同様に, 高度に抽象化された存在である.

さらに, 超準解析(無限小解析)へ誘導する.
ロビンソンは, コーシー列が間違っているとし,
ライプニッツの無限小のアイデアに帰った.


超準解析 Nonstandard analysis 創始者
Abraham Robinson, 1918年10月6日 - 1974年4月11日

圏論での極限

リミット(極限), そして双対概念のコリミット(余極限)は, 普遍性の概念に対する我々の第3の アプローチを提供する.
随伴性 adjoints はカテゴリ間の関係に関するもので, 表現可能性 representabilityは集合値関手の性質である. 極限は, カテゴリ内で何が起こることに関するものである.
極限の概念は, 数学におけるよく知られた多くの構成法を統合する. カテゴリ内のいくつかの オブジェクトとマップを取り出し, それらから新しいオブジェクトを構築するための方法に遭遇するときはいつでも, あなたが極限またはコリミットのどちらかを見ている可能性がある.
例えば, 群論では 2つの群の間で群準同型をとり, その新しい核であるその核を形成することができる. この構成は, 群のカテゴリにおける極限の一例である. または, 2つの自然数を取り, それらの最小公倍数を構成するが, これは, 可除性の順に並べられた, 自然数の 順序集合 poset 内のコリミットの例である.

数学の構成パターン:

不変量, **普遍性**, **双対性**, 自然変換, 表現, 随伴, 再帰性*, 不動点, 極限, 余極限,
直和, 直積, 準同型, 同型, 埋め込み, 嵌め込み , 畳み込み, 対称性, 保型性など.

⇒ 構成パターンを圏論で眺める

例えば :

ジョーンズ多項式(不変量)
前層とはモノイドの作用する集合の概念を一般化
余極限とはモノを集めて貼り合わせて対象を作る**圏論的構成**

ストーン双対性 (圏論的双対性, 束との対応, 双対随伴), T-双対性,
表現, ミクロ-マクロ双対性, ポントリャーギンの双対性, 直交型の双対定理として
ガロアの基本定理を理解

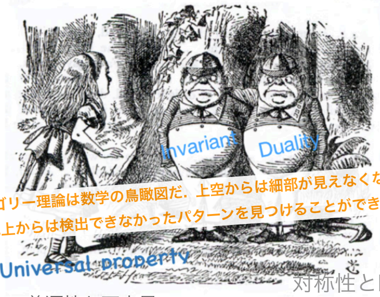
直交性 ; フーリエ変換, *weblet*, 特異点の解消=ブローアップ

クリーネの**再帰**定理(計算可能性)とロジャースの**不動点定理**
保型性はネットワークの与えられた分割に対して、グループ内のノード同士が繋がるリンクの割合からリンクがランダムに配置された場合の**期待値**を引いた値として定義
ここで、**再帰**という構成と**保型形式**の概念の関係が明らか
再帰的の双対は一時的

再帰と保型の関係 http://imetrics.co.jp/academy/Recursion-fixed%20point-and-automorphism.m4v

Coffee break

普遍性と双対性



対称性と曖昧性

普遍性と不変量

construction : 理論などの**構成**

第2章の要約

2章. ラマヌジャンと自然数の総和 <u>(ふしぎな数学)</u>

1+2+3+4+5+6+...= -1/12,　 解析接続、 → <u>標準理論(9次元宇宙)</u>

1+2+4+8+16+......= -1

“長い時間をかけて問題を解いたときの快感は性的快感に匹敵する.”
- アンドレ・ヴェイユ

数には素数という魔物が棲んでいる.

ζ- 関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^s}$　　Π ：オイラー積

p-進数 ; 遠いほど近い数, <u>天に続く数</u>, <u>ハッセの原理</u>, <u>宇宙を語る数学</u>

超弦理論 9次元 + 時間 = 10次元

かつての**ひも理論**では 25次元, 数学的には24次元が美しい.
M理論では 11次元, 基本は 9次元 + 1次元(時間) = 10次元.
6余剰次元 = 9次元 - 3次元という余剰次元が現れるのか,
ひも理論から説明してみよう.

光子には質量がない
量子ゆらぎのエネルギーはゼロではない
ゆれる方向は、空間の次元をDとすると、
(D-1) x **(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...)**
光子全体のエネルギー (=光子エネルギー + 最低エネルギー)は、
2 + (D-1) x (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...) に比例する
ここで、1+2+3+4+5+....= **-1/12**から、 光子エネルギー=2 -(D-1)/12=0 それゆえ、D = 25

では、**超弦理論**ではどうなるのか!!
光子エネルギー は、普通の空間でD次元の方向に振動するほかに、
超空間でグラスマン 数の座標の方向へも振動するため3倍の
2 -(D-1)/12 x3=2 -(D-1)/4=0となる
これから、**D = 9** となる.　　　q.e.d

自然数の総和が発散せず、　- 1 / 12　?

経験に基づいた証明

$$\begin{aligned} c &= 1+2+3+4+5+6+\cdots \\ 4c &= \quad\ 4 \quad\ +8 \quad +12+\cdots \\ -3c &= 1-2+3-4+5-6+\cdots \end{aligned}$$

$$-3c = 1-2+3-4+\cdots = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

無限級数, 特に発散級数を有限和と同様のものであるかのように扱うことは
危険である.
例えば, 発散級数に対してその任意の位置に無数の 0 を挿入することでさえ,
自己矛盾した結果を導き得る.

$1-2+3-4+\cdots = \dfrac{1}{(1+1)^2}$ の経験的な証明

(1−1+1−1+...)2 = 1−2+3−4+..., 1−1+1−1+... = 1/2 であることを利用して
1−2+3−4+... = 1/4 を証明する.
1−1+1−1+... は公式 $1-x+x^2-x^3+\cdots = \dfrac{1}{1+x}$

この式の両辺を x で微分して −1 をかけると,

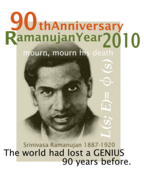
$$1-2x+3x^2-4x^3+\cdots = \frac{1}{(1+x)^2}$$

さらに、x = 1とすると、上式が得られる.

Q.E.D.

現代的な証明は、ディリクレの η 関数から

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= 1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}+5^{-s}+6^{-s}+\cdots \\ 2\cdot 2^{-s}\zeta(s) &= \quad 2\cdot 2^{-s} \quad +2\cdot 4^{-s} \quad +2\cdot 6^{-s}+\cdots \\ \left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s) &= 1^{-s}-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+5^{-s}-6^{-s}+\cdots = \eta(s) \end{aligned}$$



両辺を −3 で割れば、ζ(−1) = −1/12 を得る.

$$-3\zeta(-1) = \eta(-1) = \lim_{x\nearrow 1}\left(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\right) = \lim_{x\nearrow 1}\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$$

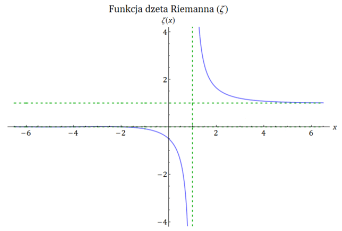
ラマヌジャン総和法は,級数の部分和に対するオイラー＝マクローリンの公式の定数項だけを分離する方法である. 函数*f*に対して, 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ の古典ラマヌジャン和 (classical Ramanujan sum) は,

$$c = -\frac{1}{2}f(0) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(0)$$

で定義される. ここで f (2k−1) は f の (2k − 1)-階導函数で B2k は 2k-番目のベルヌーイ数である (B2 = 1/6, B4 = −1/30 ...)
f(x) = x とすれば f の一階導函数が f (1) = 1 で残りはすべて消えるから,

$$c = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2!} = -\frac{1}{12}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n$ は、 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ に置き換え正規化



リーマンゼータ ζ(s) のグラフ
s > 1 で級数は収斂し ζ(s) > 1 であることがわかる.
極 s = 1 の周りでの解析接続によって負の領域まで延長すれば, ζ(−1) = −1/12 などの場合も含まれる.

見えないけれどもあるんだよ. . .

見えないものの真実

. . . 天に向かって進む数　*p*-進数　*p-adic number*

金子みすゞ

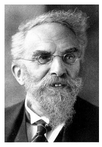
p-進数

p-adic numbers

すべての p-進数 r は、次の形に表すことができる。

$$r = \cdots + a_m \times p^m + \cdots + a_1 \times p + a_0 + \frac{a_{-1}}{p} + \frac{a_{-2}}{p^2} + \cdots \frac{a_{-n}}{p^n}$$

ここで $\cdots, a_m, \cdots, a_0, a_{-1}, \cdots, a_{-n}$ は $0, 1, 2, \cdots, p-1$ のいずれかである。このとき、$r = (\cdots a_m \cdots a_1 a_0 . a_{-1} \cdots a_{-n})_{p\text{-進}}$ と書いて、これを r の p-進法による表記という。



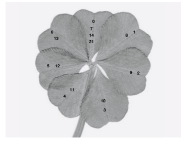
Kurt Hensel

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{C}$$

自然数　整数　有理数　実数　複素数

$$\mathcal{Z} \cap \mathcal{Z}_p, \quad \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_p$$

p 進整数環　*p*-進数体



p-進数でマルチバースを描けるか

3章. 計算の宇宙 <u>(数学とサイエンスのパラダイム変化)</u>

第3章の要約

数学は考えるサイエンス,思考実験からシミュレーション,
計算する労力は,コンピュータに委ねる時代
1+2+3+4+5+6+...= -1/12 を <u>*Wolfram alpha*</u> で計算
これまでの数学の知見をデータベース化、ツール化

離散数学の時代
離散力学系(大域的数論力学,局所的数論力学)
連続と**離散,**最適化に離散凸解析, <u>アナロジーとモデル化</u> ※
局所有限トポス =離散数学を構築するための土台

数学とは主張を証明することだ ！

※ モデル理論とアナロジーのモデルとは異なるもの

AIは, 仮説・定理を証明するアルゴリズムを作ることをできるか？
“Can artificial intelligence create algorithms that prove hypotheses and theorems? “

計算はコンピューターに委ねて

1+2+3+4+5+6+...= -1/12

Verification

Coffee break

<u>Google で “the idiot” と検索すると</u> . . . .

http://imetrics.co.jp/opinion2/googles-secret.pdf

検索エンジン　ディープラーニング

離散マルコフ過程　Backpropagation
NNにアルゴリズム誤差逆伝播法

顔認識
音声認識
被写体認識
画像検索
線画自動着色
自然言語処理

4章. AI 時代の数学

第4章の要約

数学は言語
圏論は,ソフトウェアサイエンスなど,他の科学の共通言語、

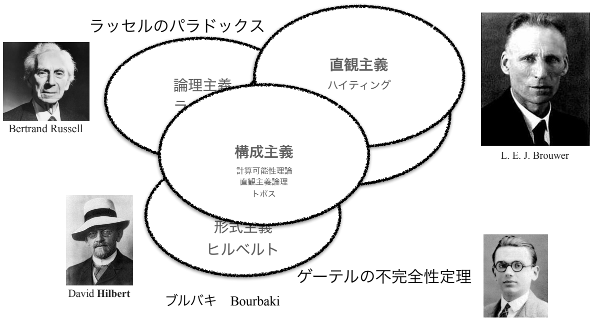
<u>基礎論</u>と <u>有限モデル理論FMT</u> **,**<u>数理論理学</u>,<u>一階述語論理 FOPL,</u>
高階述語論理 λ-h.o.l, <u>**モナド**</u>, ハイティング述語論理, **トポス**

選択公理,タルスキーのパラドックス、
“The essence of mathematics lies in its degree of freedom.” - Cantor
“数学の本質はその自由性にある” カントール

オブジェクト/クラスで新たな集合論で, 数学の基礎づけが可能

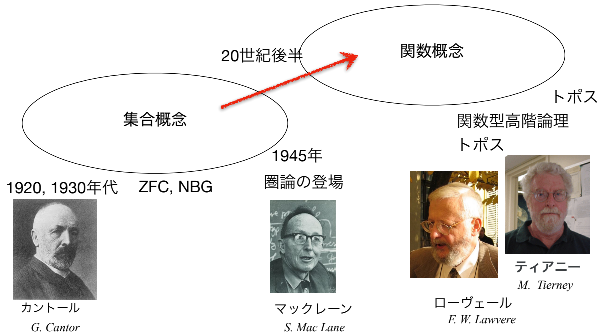
ローヴェール lawvere の**直観主義論理,トポス**
“圏論と代数幾何と直観主義論理の結びつき”
排中律の成立しない直観主義論理が,数学についてより普遍的

数学の潮流



数学的な基本とするところが変わった...

関数概念 i.e 作用を基本とする圏論的議論



数学の自由性


Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. 1 845 - 1912

“Das Wesentliche der Mathematik liegt in ihrem Freiheitsgrad.”

“The essence of mathematics lies in its degree of freedom” -G. Cantor

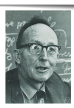
“数学の本質はその自由性にある” -　ゲオルグ・カントール

↓

オブジェクト/クラスで新たな集合論

数学の基礎づけが可能


Leopold Kronecker 1823 - 1891


S. Mac Lane 1909 - 2005

圏論 Category Theory

層・圏・トポス

圏論またはカテゴリ理論を一言でいうと，現代数学のさまざまな場面で使われる数学のコトバである．このコトバは、さまざまな具体的概念に共通する抽象的性質を記述する上で便利な抽象能力と一般化の能力を持っている．

層とトポスとは両者とも現代的な集合概念の拡張なのである．もっと正確にいえば，我々の論理を古典論理から直観論理へと移行したときに，我々の集合概念が自然にうける変化をうけて出てくるものが層であり，またトポスなのである．
一方，圏は関数概念の機能的な拡張であって，関数概念と集合概念は一方から他方が出るという意味で同等なものであるから，圏もまた集合概念の現代的拡張といってもよいのである．この意味で 層，圏，トポス は集合論および数理論理学と密接な関係をもつている．

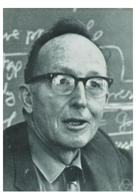
The slogan is “Adjoint functors arise everywhere.”
- Saunders Mac Lane、1998

数学的構造の多くが**随伴関手**である.

"I didn't invent categories to study functors; I invented them to study natural transformations."

圏は函手の研究のために考案されたものではない,
それは**自然変換**を研究するためのものだ.

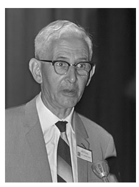
圏論の話題として、普遍性、自然変換、随伴性、表現可能性、極限、そして随伴と極限の相互作用、一般随伴関手定理 GAFTの話をしておくべきである。
圏論で最も重要な概念は**普遍性**である。


Mac Lane

数学的直観主義と構成主義

カントールの集合論に対抗してブラウワーは「数学的概念とは数学者の精神の産物であり, その存在はその構成によって示されるべきだ」と主張した. 直観主義論理は古典論理の制限であって, 排中律 *Law of excluded middle* や二重否定除去が公理として許容されない.


Luitzen Egbertus Jan Brouwer


Arend Heyting

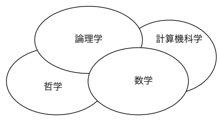
この制限によって存在具体性を持つ証明が作られる.
これは直観主義論理が数学的**構成主義** *constructivism*のある形態として適当なものとする.
ある対象が存在することの構成的証明があれば, その構成的証明はそのような対象の例を生成する**アルゴリズム**として使えるということを意味する.アレン・ハイティングは形式化された直観主義論理に発展させた.

数学は論理に先立つ

直観主義論理は、基礎論的研究に端を発しつつ、計算機科学寄りの論理学の中で発展した.

証明のダイ ナミズムを追求するのが**計算機科学的**な意味での "構成主義" である.
その出発点にある のが**直観主義論理** *intuitionistic logic* であったし, それとともに
考案されたさまざまな道具立てが用意されてきた(構造的証明論、実現可能性解釈,
関数解釈, カリー・ハワード同型対応, 古典論理の直観主義 論理への翻訳等).
さらに, **ハイティング代数** の証明論に触れて「**証明とはプログラムである**」という
考え方を主張してきた.

かつての、直観主義、形式主義、論理主義の論争と退廃から、現在では、構成的数学の
倫理基盤に**直観主義論理＝構成主義** *constructivism* が脚光されている.



圏論的普遍論理

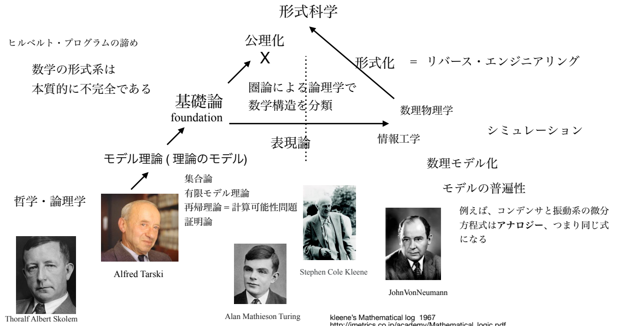
古典論理、直観主義論理、量子論理、幾何的論理やファジィ論理など、論理にはいろいろな種類のものがあって然るべし．その中でどれが本当の絶対的な論理かといえば、どれも本当の論理ではなく論理学におけるそれぞれの体系はおそらく論理学的形式化(矮小化)では捉えきれない人間の認識機構に内在する論理構造のほんの一側面を捉えているにすぎないのではないか.

トポスは直観主義論理(集合論)の圏論的概念だが,それでは他の論理に対応するトポスの概念はないのか, 例えば、量子トポス, 幾何的トポス, あるいはファジィ・トポスといった概念はないか？

論理に相対化されたトポス，多様な論理に対する統一的な圏論的視点としての「圏論的普遍論理」の研究を続けている.

Coffee break

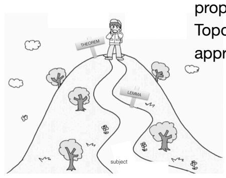
ふたつのモデル理論



kleene's Mathematical log 1967
http://imetrics.co.jp/academy/Mathematical_logic.pdf

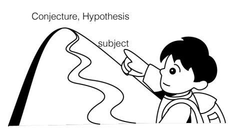
Coffee break

Doing math is to prove the subject first and foremost!



Breakdown from the theorem and lemma to prove the proposition. From the facts that are true to the theorems. Topdown is global to local, bottomup is local to global. Both approaches require a bird's eye view.

Can AI artificial intelligence create algorithms that prove hypotheses and theorems?



Сейджиро Кусафуса

Part 2

カテゴリ理論(圏論)による論理学

カテゴリ理論とは，代数学から生まれた構造記述のための数学の言葉で，
ものとものの関係を抽出して抽象化するという使い道がある.
同じく関係性を記述するグラフ理論とは異なり，現象そのものを抽象化
するのではなく, 現象について語る理論について語り，これを抽象化する
メタな言葉であるところに特徴がある.

このコトバは, 現代数学のさまざまな場面で使われ, さまざまな具体的概
念に共通する抽象的性質を記述する上で便利な抽象能力と一般化の能力
を持っている.

カテゴリ理論（圏論）

圏論は対象と矢印で記述され, その矢には3 種類ある.
1) **射** map, arrow, morphism と呼ばれる矢→で，射は対象から対象への矢印.
2) **関手** functor と呼ばれる矢⇝で，関手は圏から圏への矢印.

関手には,共変関手covariant functorと反変関手 contravariant functorという 2 種類がある.
3) **自然変換** natural transformationと呼ばれる矢$\dot{\to}$ で，自然変換は関手から関手への矢印

圏Cから圏Dへの 2 つの共変関手 $F, \tilde{F}$ ($F : \mathrm{C} \rightsquigarrow \mathrm{D}$ と $\tilde{F} : \mathrm{C} \rightsquigarrow \mathrm{D}$ が 関 手) が あるとき， Fから$\tilde{F}$ への自然変換$T : F \dot{\to} \tilde{F}$ が 述 べられる.

関手と自然変換は, 圏と圏の間の関係, 圏の外向きの関係を表す.

圏の内部の特徴ある構造には、
始対象・終対象・積・**余積・引き戻し・押し出し・極限・余極限**.
これらすべて、**普遍性** universal propertyというキーワードで統括される.
双対 duality とは、2つの一見異なる数学分野の概念が互いに変換可能であることを主張する.

随伴 adjoint, adjunctionとは、2つの関手の間に考えることができる, ある種の双対的な関係.
随伴の概念は数学に遍在し,最適化や効率に関する直観的概念を明らかにする.

超入門・圏論とトポス　http://imetrics.co.jp/academy/Introduction2CategoryTheory.pdf

Yoneda’s lemma

米田の補題

表現は, 普遍元

米田の埋め込みは充満関手 である

一般に埋め込みという語は, *A*を*B*の像と同型にする射 *A*→*B*を意味するため使用される.

$H^{\bullet}: \mathcal{A} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ は、$\mathcal{A}$ をその前層に埋め込む。

したがって, $\mathcal{A}$ は 表現可能関手が対象であるかのような $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ の充満部分圏と同値である. そのオブジェクトは**表現可能**である.

$[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$

米田信夫

表現可能関手の同型

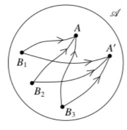
$\mathcal{A}$ を局所小圏とする. $A, A' \in \mathrm{A}$ について,

$$HA \cong HA' \Longleftrightarrow A \cong A' \Longleftrightarrow H^A \cong H^{A'}.$$

$$H_A \cong H_{A'} \Rightarrow A \cong A'.$$

各Bについて、自然に$\mathcal{A}$ (*B, A*) ≅ $\mathcal{A}$ (*B, A'*)が成り立つならば、A ≅ A' が従う.

アヒルの格好をしていて、アヒルのように歩き、アヒルのように鳴くなら、
それはおそらくアヒルだろう.



If $\mathscr{A}(B, A) \cong \mathscr{A}(B, A')$ naturally in B, then $A \cong A'$.

随伴・表現可能・極限

表現可能関手は極限を保存する

極限は極限と交換する: これは二重積分で積分の順序を変えるようなものであるため、ジョークでFubiniの定理と呼ばれる。余極限 colimitは積分のように文脈依存な和として考えることができるので、類似性は余極限 colimit がより魅力的である。

任意の前層は表現可能関手の余極限である

表現可能関手は前層に関する素数のようなもの

随伴関手定理 GAFT

$\mathcal{A}$を圏, $\mathcal{B}$ を完備な圏, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ を関手とする. $\mathcal{B}$ が局所小で, 各 $A \in \mathcal{A}$ について圏 $(A \Rightarrow G)$ が弱始対象的集合をもつなら, Gは**左随伴**をもつ ⇔ Gは**極限を保存**する

任意の 小圏Aについて, 前層圏 A はカルテジアン閉cccである.

これは**トポス理論**へと続く一歩とみなしえる結果だ.

Category Theoryの表記例

カルテジアン閉圏 *C.C.C*

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}}(X, Z^Y) &\cong \hat{\mathbf{A}}\Big(\lim_{\to \mathbf{E}(X)} H_P, Z^Y\Big) \\
&\cong \lim_{\leftarrow \mathbf{E}(X)^{op}} \hat{\mathbf{A}}(H_P, Z^Y) \\
&\cong \lim_{\leftarrow \mathbf{E}(X)^{op}} Z^Y(P) \\
&\cong \lim_{\leftarrow \mathbf{E}(X)^{op}} \hat{\mathbf{A}}(H_P \times Y, Z) \\
&\cong \hat{\mathbf{A}}\Big(\lim_{\to \mathbf{E}(X)} (H_P \times Y), Z\Big) \\
&\cong \hat{\mathbf{A}}\Big(\Big(\lim_{\to \mathbf{E}(X)} H_P\Big) \times Y, Z\Big) \\
&\cong \hat{\mathbf{A}}(X \times Y, Z)
\end{aligned}$$

引き戻し *Pull back*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted, "\bar{f}"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "t"] \\
& X \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}$$

可換四角形図式

トポスToposという種類のカルテジアン閉圏は、数学に対する従来の集合論に替わる一般的な枠組みとして提示された.
トポスとはいくつかの特別な性質を持つ圏のことであり、トポス理論は思いもつかない方法で論理学と幾何学の重要な側面を統一する.
引き戻しは、極限の定義の種類の一つ。極限の概念は、数学におけるよく知られた多くの構成法を統合する。

カルテジアン閉圏ccc

カルテジアン閉圏*ccc*とは、**有限直積** finite productsと**べき**exponentialsをもつ圏である.

カルテジアン閉圏において、「2変数関数」（つまり、射 $f: X \times Y \to Z$）は常に「1変数関数」（つまり射 $\lambda f: X \to ZY$）として表現できる.

任意の 小圏Aについて, 前層圏 A はカルテジアン閉である。

トポスは有限極限を持つカルテジアン閉圏.

計算機科学における応用ではこれはカリー化として知られ、単純型付ラムダ計算の任意のカルテジアン閉圏における解釈を実現に導く.

カリー-ホワード-ランベック対応は、直観主義論理、**単純型付ラムダ計算**、カルテジアン閉圏の間の深い同型を与える.

カルテジアン閉圏ccc http://imetrics.co.jp/academy/Cartesian-Closed-Category.pdf

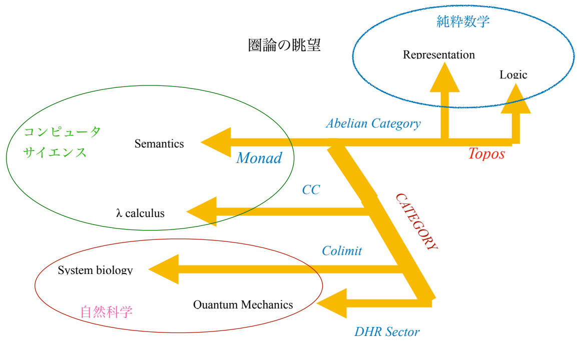
双対性は述語論理,集合論の圏論的意味論である

ストーン型双対性はそれ自体圏論的**意味論**である. さまざまな命題論理Tの随伴も含む広義での双対性は,良い場合には,対応する述語論理ないし集合論の圏論的モデルT-hyperdoctrineを与える. そういった「双対性モデル(ストーンモデ ル)」は, 無矛盾性証明や独立性証明に応用できる. 命題論理の双対性について考えるとき,ひとは既に述語論理·集合論の領域に足を踏み入れている. 例えば,位相空間の圏とフレームの圏の間のストーン双対性を導く開集合系をとる関手は,幾何的論理に対応する*T*-hyperdoctrineを与える(フレームはモナドの代数なので幾何的論理は圏論的普遍論理の範疇に入る). 位相空間*S*上の層のなす圏による集合論の解釈モデルとも呼ばれ, 強制法の圏論的基礎を与える)は, *S*の開集合系のなすフレーム*Ω*をヤヌス対象として誘導される, **Sets**と**HA**の間の双対随伴の双対性モデルを介して構成される.双対性理論は,直観主義論理,集合論を越え, さまざまな体系に対して,こういった双対性モデルを系統的に与える,圏論的意味論の源泉として機能する重要なのは**,圏論を用いることにより,高度の一般性と概念的明晰性を兼ね備えた「普遍論理」の構築が可能になる**ということである. その背景には,**モナド**としての命題論理という代数論理的な視点や,随伴としての量化子などの圏論的論理の視点が生きている. そこでは,構文論と(モデル論的)意味論という, ストーン双対性の背後にある二項対立は発展的に解消され,証明系やタルスキ型モデルといった特定の表現形式から独立した**論理それ自体**の概念が垣間見える. **圏論的論理において双対性**は, もはや二項対立の圏論的表現ではなく,**多様な述語論理·集合論の圏論的様態**である.

丸山善宏,圏論の歩き方より

Marshall Harvey Stone, April 8, 1903 - Jan 9, 1989

Coffee break



Category theory trotters
圏論の歩き方、日本評論社

代数的論理から圏論的論理へ、

ビッグデータとデータマイニング(P値), **ベイズ統計** (直観的信頼度),
統計的AI, 直近のニューラルネットワークNNによるAIの成功.

双対性は述語論理・集合論の圏論的意味論である.

圏論的論理学による記号的AIに注目

圏論的プログラミング言語: Haskel の利用

スレッジハンマーで、h.o.lをFOPLへ変換

記号AIと統計的AIの融合、圏論から量子言語学 (≈ 統計学)

トポスの登場

層とトポスとは両者とも現代的な**集合概念の拡張**である

トポスはGrothendieck Topos, Lawvereの圏論的集合論と論理の圏論的解釈の研究,
および伝統的なcHa(complete Heyting algebra)上の直観主義論理の理論の結合として
W. LowvereとM. Tierneyによって生み出された.

最初のスローガンは層の理論のinternalization,すなわちGrothendieck toposの圏論に
とっての猥雑な部分=集合論的部分を初歩的**トポス**elementary toposの**有限図式**で書き
かえることであった.

この方向はinternal category論に関するDiaconescu等の精緻な研究を経て進められた.

トポスの基礎、倉田伶二朗

トポス理論

第1に, 集合論を用いずに数学の基礎付けを行なうことができるということを示した.
言い換えれば集合論が数学の唯一の基礎を与えるものでないこと, または同じように,
集合論的数学観が唯一の正しい数学観ではないことが示された.
集合論的な数学観に代わるカテゴリー論的ないしは, トポス論的数学観が話題である.

第2に, この理論は, 数学においてわれわれが通常用いる第一階の述語論理(古典論理)が
唯一の正しい論理とはいえず, むしろ排中律の成り立たない直観主義論理が, 数学にお
いては, より普遍的な性質を備えた理論であることを示した.

主な、トポスの着眼点

(1) サイト上の層のカテゴリ –
(2) 有限極限とベキ対象を持つカテゴリー
(3) 直観主義**高階論理**の具体化

トポスの定義

トポスなる圏とは, 終対象と始対象をはじめ およびそれらの双対,そしてさらに巾
とsubobject classifierが適用できる状況を備えた圏である.

集合という構造を層構造として位相空間の上に拡大したものをトポスと名付ける

定義1 (トポス)
圏Eが下記の条件(1)~(4)をみたしているとき、圏$\mathcal{E}$は「トポス (topos)」と呼ばれる.

(1) $\mathcal{E}$には、終対象1が存在する.

(2) $\mathcal{E}$には, $\mathcal{E}$の任意の二つの対象 A, Bについて, その積 A X Bが存在する.

(3) $\mathcal{E}$には, $\mathcal{E}$の任意の二つの対象 A, Bについて,その巾 B^Aが存在する.

(4) $\mathcal{E}$には, subobject classifier Ω が存在する.

Stone Duality 代数的論理から圏論的論理へ、そしてトポスの論理
http://imetrics.co.jp/academy/StoneDualityToposHyperdoctrine.pd

トポスによる新しい数学への統合


F. W. Lawvere

F. W. Lawvereは1975年のシカゴ講演 において次のように述べている.
“1963年頃数学の基礎に5つの重要な発展がみられた. すなわち
(i) Robinsonのnon standard analysis, (超準解析=無限小解析)
(ii) Cohenによる集合論 における独立性の証明,
(iii) **直観主義的述語論理**におけるKripke解釈,
(iv) Lawvereによる**集合圏**のelementary theory,
(v) Grothendieck **topos**におけるGiraud理論
がそれであり,これらは7年後に,LawvereとTierneyによって統合された.”


A. Robinson

またBoileauとJoyalは1981年の論文で, さらに代数幾何, 微分幾何, 解析的幾何,
代数的位相幾何, ホモロジー, コホモロジー, ガロアの理 論への広がりを指摘した.


Paul Joseph Cohen


A. Boileau

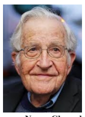

A. Joyal

自然言語、数学と生成文法

文法とはある特定の形式的特性を持つ規則のシステムである．文法の獲得は, 人間に生得的に(生物学的に)与えられた言語機能によって行なわれる．普遍文法が人間にとって可能な文法規則のシステムのクラスを定め, 与えられた1次言語データと適合す る文法候補の中から正しい文法を選び出す過程が**言語獲得**である．

もう一つの**極小モデル** (MP)

言語の普遍性と多様性



Avram Noam Chomsky

文法モデルの変遷

初期モデル(1955年〜1964年): いくつもの「言語学的レベル」と付随するL標識、連結代数を基にするシステム、強力な文法的変換、文脈依存句構造文法

↓サイクルの導入、一般変換/T標識の廃棄、文脈依存性の廃棄

標準理論(1965年〜1970年):
辞書の充実、文脈自由句構造文法、変換に対する制約、
深層構造の導入、音韻部門と意味部門の充実

↓深層特性、表層特性の認識

拡大標準理論(1970年〜1993年):
痕跡の導入、意味の二重性 (duality)の認識

↓句構造と変換の統一、併合

極小モデル (純粋派生モデル) (1993年〜現在):
内的な言語学的レベルの廃棄、インターフェイス概念の導入、単純性のモデル全体への適用

極小モデル Minimalist Program

「**対称性**」「**不変量**」の概念が, 言語機能の本質を規定している．

言語学が対象にしている自然現象は, 非有機体でなく生物現象

チョムスキーは生成文法の研究を, 1900年代に統率と束縛の理論から**極小モデル**へ大きく転回し, 生物・物理学的意義を協調した．

＋

20世紀後半の数学基礎論

⇓

一般次元へ拡張された限定詞 determiner の数学

限定詞は保存的 conservative である．我々人類の言葉には存在的、intersectiveな限定詞がある．これを数学的に極限を考えると, 自然に保存性が説明できる．パターンの習得すなわち言語獲得は極限への操作であると．

関数型高階論理とトポス

「述語」を「関数」と呼ぶ

関数型高階述語論理　*λ-h.o.l.*

自然言語 NL の形式化　→ 略式モンテギュー文法

NL断片の形式化

John walk(s)

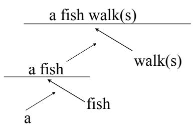
NL	*λ-h.o.l.*
自動詞 walk	$fish'_{et}$
固有名詞 walk	$\lambda x_{et}.x_{et}(j_e)$

Richard M. Montague

自然言語 NL の形式化　→ 略式モンテギュー文法

NL断片の形式化

例文　**a fish walk(s)**



<NLの表現>　< *λ-h.o.l* の効果>

名詞 fish.　→　$fish'_{et}$

限定名詞 a　→　$\lambda x_{et}.\lambda y_{et}.\ \exists z_e(x_{et}(z_e) \wedge y_{et}(z_e))$

限定詞　all　→　$\lambda x_{et}.\lambda y_{et}.\ \forall z_e(x_{et}(z_e) \supset y_{et}(z_e))$

例文の形式化:以上のもとで例文は,上の構文解析の結果に従って,翻訳規則1, 2, 3が下記のように少しずつ適用され,またそのつど*λ.h.ol.*の項として整理変形される, という仕方で形式化されていく·
すなわち例文は,最終的には, *λ-h.o.l.*の *t* タイプの項(i.e.式) $\exists z_e(fish'_{et}(z_e) \wedge walk'_{et}(z_e))$に形式化される．

<NLの表現>　< *λ-h.o.l* の効果>

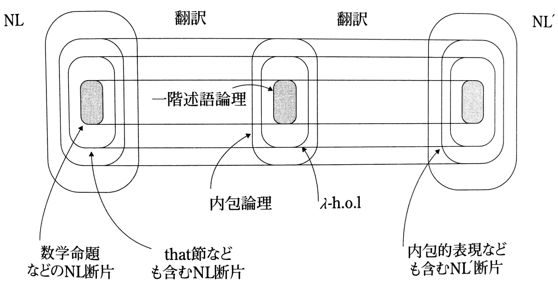
a fish　→　$(\lambda x_{et}.\lambda y_{et}.\ \exists z_e(x_{et}(z_e) \wedge y_{et}(z_e)))\ fish'_{et}$

$\underset{A.3}{\rightarrow}\ \lambda y_{et}.\ \exists z_e(fish'_{et}(z_e) \wedge y_{et}(z_e))$

a fish walk(s)　→　$(\lambda y_{et}.\ \exists z_e(fish'_{et}(z_e) \wedge y_{et}(z_e)))\ walk'_{et}$

$\underset{A.3}{\rightarrow}\ \exists z_e(fish'_{et}(z_e) \wedge walk'_{et}(z_e))$

機械翻訳



ディープラーニング
Deep learning

ニューラルネットワークによるディープラーニングを使ったニューラル機械翻訳(NMT)が登場したことで, 自然言語翻訳の品質が大幅に向上.

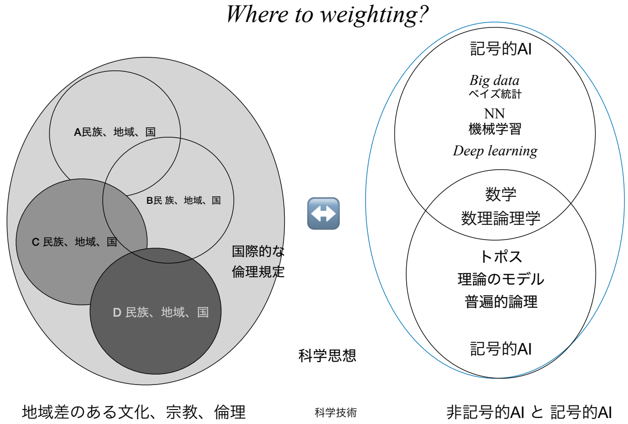
ニューラルネットワーク neural network: **NN**は、脳機能に見られるいくつかの特性に類似した数理的モデル.

誤差逆伝播法 (**Backpropagation**) が, 排他的論理和 exclusive or を解決.
機械学習において, ニューラルネットワークを学習させるアルゴリズムに利用.

ディープラーニングが, 2012年頃からは急速に研究が活発となり,
第３次人工知能ブームが到来した.

顔認識
音声認識
被写体認識
画像検索
線画自動着色
自然言語処理

Where to weighting?



AIのシンギュラリティは来るか？

来ない！

AIの未来予想図が，その実態とかけ離れている．AIは神に代わって人類にユートピアをもたらすことはないし, その能力が人智を超えて人類を滅ぼしたりすることはない. 当面と言うのは, 現代の数学者が存在のうちにはということだが, AIやAIを搭載したロボットが人間の仕事をすべて肩代わりするという未来はやって来ない. それは, 数学者なら誰にでもわかることだ. AIはコンピューターであり、コンピューターは計算機であり, 計算機は計算しかできない. それを知っていれば, ロボットが人間の仕事をすべて引き受けてくれたり，人工知能が意思を持ち、自己生存のために人類を攻撃したりするといった考えが妄想に過ぎないことは明らかだ. AIがコンピューター上で実現されるソフトウェアである限り，人間の知的活動のすべてが数式で表現できなければ，AIが人間に取って代わることはない．AIに神様になってほしいと思う人たちには残念なことかもしれないが，今の数学にはその能力はない. コンピューターの速さや, アルゴリズムの改善の問題ではなく, **数学の限界**なのだ. だから, AIは神にも征服者にもなれない．シンギュラリティも来ない.

来る！

コンピュータは計算だけではなく,論理演算ができる，一階述語論理だけでなく高階述語論理も扱い始めた. さらに学習できる,自分でプログラムを書き換えることもできる. 数学者は, 圏論的普遍論理に相対化されたトポス，多様な論理に対する統一的な圏論的視点としての圏論的普遍論理の研究を続けている. AIが人に代わるのではなく, 人が人生を左右する多くのことをAIに判断を委ねてしまうなら, シンギュラリティが来たといえるのではないか.

数学とAIの関わり

数学とは, 主題を証明すること. コンピュータによるその過程は**試行錯誤** *Try & Error* で解法のアルゴリズムを見つけることだ. 解法アルゴリズムが判明すれば, 人力でも解ける.

統計的かつ確率的AIは, 予想していない解を導き出すことがある. 囲碁将棋のような完全情報ゲームなら, その解を人間でもトレースできる. 完全な情報でないなら, 人間は神のみ知る解を受け入れるようなもの. 何が正しく正しくないかは, 統計的データ*Big data* (経験 *experiences*・事実 *fact*) からは判断できない.

学習とは, 情報の記憶だ. これは、機械の学習でも, 子どもたちの学習でも同じだろう. 真似・経験・事実を無条件に受け入れる(記憶する)ことを学習という人も少なくないが, 不適切なルールや倫理に基づく経験や事実は情報から排除されるべきだ.

少なくとも, 普遍的論理により正しくない述語論理からの結論を取捨選択しなければならない. そのために記号的AIの研究を進めている.

記号的 (意味論を含む) AIでも, 人間が予想しない解を導き出すかもしれない. それには, 人間の知識の限界が関わっている. また,そこに人間の知の探求への好奇心が働く.

最後に, 次世代を担う子どもたちへの数学教育は重要である. 新しく導入されるプログラミング学習は試行錯誤のプロセスだ. そのプログラミングを通して, 数学とアルゴリズム教育を進めていく. 私たちは, そんな教材を研究しているところである.

Conclusion

1. 数学は言語であり, 全ての科学の基礎である.
   現代数学は, 直観主義と構成主義に基づく.

2. 計算をコンピュータに委ね, 数学者は主題を証明していく.

3 . 集合論に代わり, **圏論**により数学を構成していく.

4. 新しい集合像として, 層・圏・トポスがある.

5. 双対性は述語論理・集合論の圏論的意味論である.
   圏論により高度の一般性と概念的明晰性を備えた普遍論理の構築が可能になる.

6. 数理論理学, 有限モデル理論, **トポス**(圏論による直観主義論理=構成主義), 量子言語学, 数理哲学などが, 記号的AIに貢献している.

7. 学習はTry & Errorによる経験と記憶. 次世代の子どもたちにアルゴリズムと言語教育を提供していく.

Coffee break

リタイヤ後に、数学を楽しむ


André Weil

Même si je suis un prisonnier, j'aimerais continuer à penser aux mathématiques.

例え囚われの身であっても, ゆったりとした時間の中で数学を考え続けたい .....

There's nothing like the feeling which invades you when after months of hard thinking, you finally understand the right reasoning to solve your problem. The great mathematician André Weil likened this -- no kidding -- to sexual pleasure.

何ヶ月ものハード思考の後, あなたは問題を解決するための正しい推論をようやく理解したときにあなたを侵略するような感覚はありません. 偉大な数学者 アンドレ・ヴェイユ　AndréWeilは, これを - 冗談ではない - 性的快楽に喩えた.

Contents

Note to the readers

"Mathematics is a language" is the slogan for this electronic book. From now on, it is a math teaching material created for those who want to gain knowledge of modern mathematics, and those who are looking for research themes after retirement. In particular, it is ideal for those who want to quickly learn all the fields of modern mathematics. From philosophical thinking such as what is math, what is logic, and what is language while pursuing keywords that construct math, we need from the late 20th century to the AI era, such as sheaves, categories, toposes, etc. I provide topics of good mathematical research in the words of great people. All audio commentary is spoken in English, so you can also master international mathematical terms. Even when trying to challenge foreign literature, it may not have been the case that you were often confused by language barriers and contrasts with inappropriately translated terminology. In an international era, I would like you to read the most advanced originals as much as possible and learn in the original language. I hope this electronic book will help you.
Distribution is provided via electronic media (DVD-R). If you want to check the results of the dictation, the Dictation note has prepared text, so please proceed learning while checking when necessary.

読者の方へ

「数学とは言語」が,この電子図書のスローガンです．これから,現代数学の知識を得たい方,リタイヤ後の研究テーマを探している方などに向けて制作された数学教材です. 特に,現代数学の各分野を俯瞰的に速習したい方に最適です.数学を構成するキーワードを眼で追いながら,数学とは何か,論理とは何か,そして言語とは何かといった哲学的な思索から，層・圏・トポスなど20世紀後半からAI時代に必要な数学研究の話題を偉人たちの言葉で提供します．解説は全て英語で語られていますので,併せて国際的な数学用語をマスターすることができます．海外文献に挑戦しようとしても言葉の壁に躓いたり,不適切に訳された専門用語との対比に混乱したことが少なくなかったかもしれません. 国際的な時代には,できるだけ先進的な原著に目を通し,オリジナルの言語で学んで欲しいと思います. 本電子図書がその手助けになれば幸いです.
配布は電子媒体(DVD-R)で提供されます. 口述の成果を確かめたい方には, Dictation note にテキストが用意されていますので,必要なときに確かめながら学習を進めていってください.

著者紹介

草房 誠二郎：1950年生まれ、宇都宮大学大学院工学研究科修士課程修了, 計算科学, 数学, 航空宇宙．コンピュータ会社でのAI研究開発, Cirrus Int'l consulting, Inc. (U.S.A), 政府系機関での海外先進科学技術専門家, 現在, 一般財団法人総合科学研究機構 総合科学研究センター長

References

Basic Category Theory, Tom Leinster, 2014 Cambridge studies in advanced mathematics 143, Cambridge university Press
Category Theory, 2nd. edition Steve Awodey, Oxford Logic Guide 52, 2011, Oxford University Press
Logic, Mathematics, Philosophy, Vintage Enthusiams: Essay in Honor of John L. Bell, 2011 Springer Science & Business Media
Applied Nonstandard Anaalysis, Martin Davis, 2004 Dover Publications Inc.
Does the Multiverse Really Exit? George F. R. Ellis, Scientific American August 2011
Toposes and Local Set theories, An introduction, J. L. Bell, 1988, Dover Book Publications Inc,
Categories for the Working Mathematician, 2nd. edition 1998, Sanders Mac Lane, Springer-Verlag New York, LLC.
Mathematical logic, Joseph R. Shoenfield, Addison-Wesley 1967
ベーシック圏論, T. レンスター, 斎藤恭司監修, 土岡俊介訳, 2017 丸善出版
連接層の導来圏に関わる諸問題、 2016 数学書房
天に向かって続く数、加藤文元/中井保行、2016 日本評論社
圏論の基礎、S.マックレーン, 三好博之/高木理訳, 2012丸善出版
圏論の歩き方、2015 日本評論社
圏論による論理学(高階論理とトポス)、清水義夫、2014 東京大学出版会
バナッハ-タルスキの密室、瀬山士郎、2013 日本評論社
新・自然科学としての言語学 (生成文法とは何か)、福井直樹、2012 ちくま学芸文庫
数学は言語、上野健爾監修、新井紀子著、2009 東京図書
ミラー対称性入門、深谷賢治、2009 日本評論社
ゲーテルと20世紀の論理学(完全性定理とモデル理論)、田中一之編、2006 東京大学出版会
コホモロジーのこころ、加藤五郎、2003 岩波書店
コホモロジー、安藤哲哉、2002 日本評論社
層・圏・トポス (現代的集合像を求めて)、竹内外史、1978 日本評論社
選択公理(発生と論争、そして確立への道)、田中尚夫、1987 遊星社

iMetric
Academy Press

Printing House. iMetrics, Inc.
1197-67 Koya, Tsukuba science city, JPN 3002642

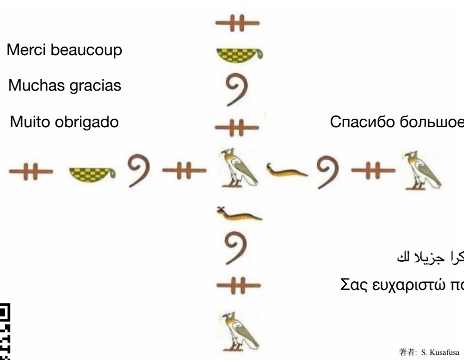
Metrics Academy Press is part of iMetrics, Inc. it furthers the mission by disseminating knowledge in the pursuit of education, learning and research at the highest international levels of excellence.
imetrics.co.jp
www.imetrics.co.jp
Account: 00120-5-789654

Information on this title: http://imetrics.co.jp/start.pdf

First published 2019

A catalogue record for this publication is available from the database of Japan Publishing organization.

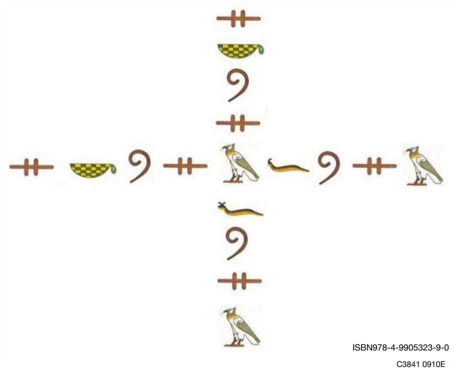
ISBN 978-4-9905323-9-0 C3841



http://imetrics.co.jp/academy/Topos-presentation.m4v

著者: S. Kusafusa
制作：iMetrics.co.jp (日本語版 / ENGLISH)

ISBN978-4-9905323-9-0 C3840



V3.0.7.6

ISBN978-4-9905323-9-0
C3841 0910E
9784990532390

iMetrics Academy Press, Tsukuba