オッグの素数とモジュラー曲線

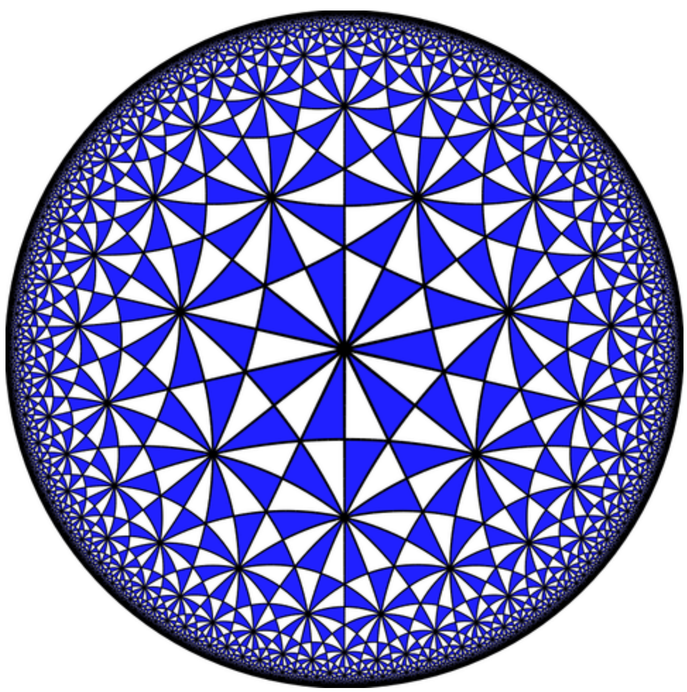
オッグ素数とは、**2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71**

モジュラー曲線は、複素上半平面Hの合同部分群Γの作用による商として定義されるリーマン面

合同部分群 Γ とは、整数の 2 × 2 の行列 SL(2, Z) のある部分群のことである。

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} :\ a, d \equiv \pm 1 \mod N \text{ and } b, c \equiv 0 \mod N \right\}$$

モジュラー曲線はコンパクトとは限らないが、有限個の Γ のカスプと呼ばれる点を加えることでコンパクト化されたモジュラー曲線 X(Γ) を定めることができる。
モジュラー曲線の点は、楕円曲線とそれに付随する群 Γ に関係するある構造をもったものの同型類の集合とみなすことができ、モジュラー曲線を代数幾何的に、また有理数体 Q や円分体の



上でモジュラー曲線を定義することもできる。このことからモジュラー曲線は整数論で重要な対象である。

オッグは、数論に出てくるモジュラー群を研究していた. 整数の対を他の対に変化させる作用からなる群である. このモジュラー群は、双曲平面に作用し、巻き込んで球面にする.

オッグは各素数に対応して存在するモジュラー群の部分群を探した. これらの部分群は、全体のモジュラー群よりは緩やかに双曲平面を巻き上げて、球面やそれ以外のいろいろな曲面を作り出す.

オッグはその曲面がちょうど球面になるのは、素数が2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71のときだけとした.

SL(2, R) の Γ0(p) の正規化因子(normalizer) Γ0(p)+ と対応するモジュラー曲線が種数 0 であることと、p が 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59 あるいは、71 であることと同値である

これらが正確にモンスター群の位数の素因子となっている。この Γ0(p)+ についての結果は、ジャン＝ピエール・セール(Jean-Pierre Serre), アンドレ・オッグ(Andrew Ogg)とジョン・トンプソン(John G. Thompson)が1970年代に発見し、モジュラー群とモンスター群の関係を発見したオッグは、この事実を説明したものには、ジャックダニエルのウイスキーのボトルを進呈すると論文に記載した