モンスターと対称性

有限群の分類 Finite simple groups classification

1981年に完成したといわれる有限単純群 Finite simple groups の分類は、以下の4つの分類のうちのいずれかに同型になる。

(1) 素数位数の巡回群　Cyclic group of prime order
(2) 交代群 A_n（ｎ≧5）Alternate group An
(3) Lie型の単純群 Lie simple group
(4) 散在型単純群（26個＝5個＋21個）Sporadic simple group

(4)の5個というのは、マシュー群 Mathieu groups の M11 , M12 , M22 , M23 , M24 。また、その21個というのは、1964年から1965年までに、散在的に発見された散在型単純群 Sporadic simple groups。その中でも1973年に発見された2個の群は他の群に比べて位数が大きいために、それぞれモンスター Monster 、ベビーモンスター Baby monster と愛称で呼ばれることになるが、その経緯を紹介しておこう。

位数2の元、すなわち自分自身との積が単位元となるような元は、有限群にと って特別に意味がある。2つの位数2の元の積が常に位数3以下の元であるとき、その群を3-**互換群**と呼ぶ。このような群は、フィッシャー Fischerにより研究され、フィッシャー群 Fischer groupsと呼ばれる3つの散在型の単純群につながった。フィッシャーはさらに、2つの位数2の元の積が常に位数4以下の元になるような群を研究し、 未知の単純群が存在する可能性に気づいた。その単純群は、今日ベビーモンスター単純群と呼ばれている。その後、フィッシャーとグリースGriessは独立に、ベビーモンスター単純群を含むさらに大きい単純群が存在する可能性を示した。

Fischerはさらに、2つの位数2の元の積が常に位数4以下の元になるような群を研究し、 未知の単純群が存在する可能性に気づいた。その単純群は、今日ベビーモンスター単純群と呼ばれている。その後、Fischerと Griessは独立に、ベビーモンスター単純群を含むさらに大きい単純群が存在する可能性を示した。その大きい単純群が、モンスター単純群 Monster simple groupである。モンスター単純群はGriessの1982年の論 文[1]により存在することが確定した。実際、Griessは 196,883次元の非結合的可換代数の全自己同型群として、モンスター単純群を具体的に構成することに成功した。モンスター単純群の発見にまつわる歴史は、鈴木通[2] に詳しい。ちなみに、これらの愛称には、フィッシャーとグリースのイニシャルFとGを冠した“Friendly Giant”ともいわれるが、一般には、コンウェイConwayが名付けたモンスター が定着した。

モンスター単純群の元の個数は、 およそ8×10^53、正確には、

808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754, 368,000,000,000
= 2^46・3^20・5^9・7^6・11^2・13^3・17・19・23・29・31・41・47・59・71
である。

千葉大学の自然科学系総合研究棟1階にあるサイエンスプロ ムナードに、モンスター単純群の元の個数を刻んだモニュメン トがあり、”人類が到 達した意味のある数字のうち最も大きいもの”と記してある。

モンスター単純群の元の個数の素因数は、 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、 31、41、47、59、71である。この15個の素数が保型関数においてある性質を満たす素数と一致することをオッグ Oggが指摘した。そこでこれら**オッグの素数**、をSupersingular primesという。

登場から間もない1970年代半ばから、モンスター単純群と整数論における保型関数との関係が注目された。その後、コンウェイとノートン [4]において、モンスター単純群の既約指標と保型関数との関係に関する、ある種の予想が提出された。この予想は、ムー ンシャイン予想と呼ばれた。それは、モンスター単純群が作用する無限次元の加群の存在を示唆するものであった。そのような 加群は、フレンケル Frenkel、レポースキー Lepowsky、モイマン Meurmanにより、1988年に頂点作用素代数を用いて構成された。1978年、ジョン・マッカイ(John McKay)は、j (τ) 関数のフーリエ展開の最初のいくつかの項に注目した.さらに、ボーチャーズ

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + 20245856256q^4 + \cdots$$

$$q = e^{2\pi i \tau}$$

$$\begin{aligned}
1 &= r_1 \\
196884 &= r_1 + r_2 \\
21493760 &= r_1 + r_2 + r_3 \\
864299970 &= 2r_1 + 2r_2 + r_3 + r_4 \\
20245856256 &= 3r_1 + 3r_2 + r_3 + 2r_4 + r_5 \\
333202640600 &= 5r_1 + 5r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_7
\end{aligned}$$

τ (n) = 1, 196883, 21296876, 842609326, 18538750076, 19360062527, 293553734298, ...

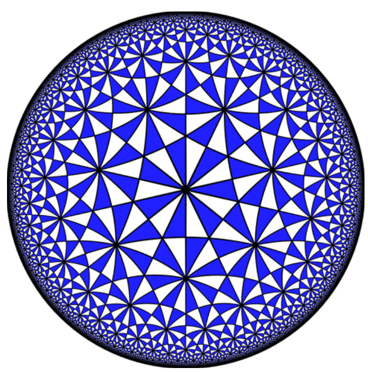
Borcherdsにより、 ムーンシャイン予想が証明された。

オッグの素数と双極平面

オッグは、数論に出てくるモジュラー群を研究していた. 整数の対を他の対に変化させる作用からなる群である. このモジュラー群は、双曲平面に作用し、巻き込んで球面にする. オッグは各素数に対応して存在するモジュラー群の部分群を探した. これらの部分群は、全体のモジュラー群よりは緩やかに双曲平面を巻き上げて、球面やそれ以外のいろいろな曲面を作り出す.

オッグはその曲面がちょうど球面(種数0)になるのは、素数が2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71のときだけとしたSL(2, R) の Γ0(p) の正規化因子(normalizer) Γ0(p)+ と対応するモジュラー曲線が種数 0 であることと、p が 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59 あるいは、71 であることと同値である。

これらが正確にモンスター群の位数の素因子となっている。この Γ0(p)+ についての結果は、



ジャン＝ピエール・セール(Jean-Pierre Serre), アンドレ・オッグ(Andrew Ogg)とジョン・トンプソン(John G. Thompson)が1970年代に発見し、モジュラー群とモンスター群の関係を発見したオッグは、この事実を説明したものには、ジャックダニエルのウイスキーのボトルを進呈すると論文に記載した。

種数 0 のモジュラー曲線はモンストラス・ムーンシャイン予想との関係で非常に重要であることが判明した。モジュラー曲線の Hauptmoduln を q-展開した係数の最初のいくつかが、19世紀に既に計算されていたが、最も大きな単純散在モンスター群の表現空間の次元と同じになっていることが、非常に衝撃的である。

$$q=\frac{1}{24}(p+2)(p-3)(P-5)$$

もうひとつの関係は、SL(2, R) の Γ0(p) の正規化群 Γ0(p)+ から定まるモジュラー曲線が種数 0 であることと、p が 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59 あるいは、71 であることと同値である。さらにこれらの素数はモンスター群の位数の素因子と一致する。この Γ0(p)+ についての結果は、ジャン＝ピエール・セール(Jean-Pierre Serre), アンドレ・オッグ（英語版）(Andrew Ogg)とジョン・トンプソン(John G. Thompson)が1970年代に発見し、モジュラー群とモンスター群の関係を発見したオッグは、この事実を説明したものには、ジャックダニエルのウイスキーのボトルを進呈すると論文に記載した。

この関係は非常に深く、リチャード・ボーチャーズ(Richard Borcherds)により示されたように、一般カッツ・ムーディリー代数とも深く関係する。この分野の仕事は、至るところで正則でカスプを持つモジュラー形式に対し、有理型でありカスプで極を持つことのできるモジュラー函数の重要性を示している。これらの仕事は、20世紀の重要な研究の対象となった。

種数

$$-\pi\chi(X(p))=|G|\cdot D$$

被覆 X(N) → X(1) はガロア群 SL(2, N)/{1, −1} を持つガロア被覆であり、N が素数であればこのガロア群は PSL(2, N) と同じになる。リーマン・フルヴィッツの公式とガウス・ボネの定理を適用すると、X(N) の種数を計算することができる。レベルが素数 p ≥ 5 であれば、
である。
ここに χ = 2 − 2g はオイラー標数、IGI = (p + 1)p(p − 1)/2 は群 PSL(2, p) の位数、D = π − π/2 − π/3 − π/p は球状の (2,3,p) の三角形の角度欠陥(angular defect)である。このことから、公式が導かれる。

このようにして、X(5) は種数 0 であり、X(7) は種数 3 であり、X(11) は種数26 であることがわかる。p = 2 あるいは 3 に対しは分岐を考えに入れる、つまり、PSL(2, Z) には位数 p の元が存在し、PSL(2, 2) は位数 3 というよりも位数 6 であることを考慮する必要がある。N を因子として含むレベル N のモジュラー曲線の種数についてのより複雑な公式がある。

種数 0

一般に、モジュラー函数体とは、モジュラー曲線（あるいは既約であるような他のモジュライ空間）の函数体である。種数が 0 であることは、そのような函数体が唯一の超越函数を生成元として持っていることを意味し、たとえば、j-函数は

$$X(1)=PSL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$$

の函数体を生成する。この生成元はメビウス変換で移りあう函数を同一視すると一意となり、適切に正規化することができ、そのような函数を Hauptmodul (あるいは主モジュラー函数 (principal modular function)と呼ぶ。

空間 X1(n) は n = 1, ..., 10 と n = 12 に対して、種数 0 である。これらの曲線は、Q 上で定義されているので、そのような曲線上には無限に多くの有理点が存在し、よって、これらの n の値に対し n-捩れを持つ有理数体上定義された楕円曲線が無限に存在する。n がこれらの値のときのみ、逆のステートメントが成り立ち、これがメイザーの捩れ定理である。

References

1. Griess. The Friendly Giant, Inventiones Mathematicae, Vol. 69, pp. 1-102, 1983
2. 鈴木通夫, 有限単純群の分類, 数学, 第34巻, 193 - 210頁, 1982
3. Conway and Norton, Monstrous Moonshine, Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 11, pp. 308- 339, 1979
4. Borcherds , Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, Inventiones Mathematicae, Vol.109, pp. 405-444, 1992