

曆の中の魔方陣

S. Kusafusa

MON	TUE	WED	THU	FRI	SAT	SUN
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29		

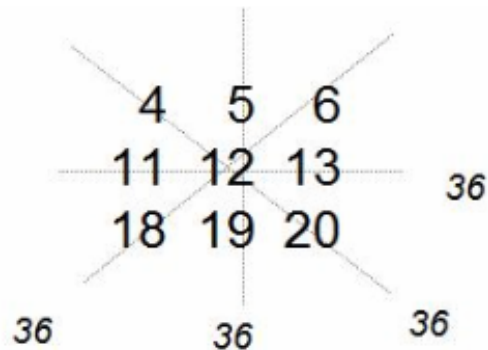
MON	TUE	WED	THU	FRI	SAT	SUN
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29		

対角線の数字を合計すると、すべて同じ数字になる。

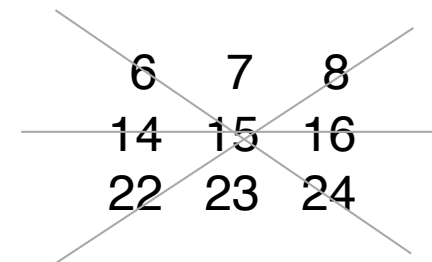
$$(36 \times 4) - (12 \times 3) = (12 \times 12) - (12 \times 3)$$

つまり、魔方陣の中心の数に3 x 3 行列の9を掛けることで総和が求まる。カレンダーは7曜でも6曜でも8曜でも同じ結果になる。つまり、3列の数字を切り取るとき、平行四辺形で切り取っても結果は同じである。これは等差配列の問題と考えると容易に理解できる。

3 x 3 の配列は、等差 1 の配列だから、配列の回転という定理が利用できる



$$12 \times 9 = 108$$



$$15 \times 9 = 135$$

さらに、n行m列での一般解を考えよ。

$4 \times 4 = 16$, $5 \times 5 = 25$ なら、それぞれ 16, 25 を重心(回転の中心)の数に乘じればよい。等差配列が、 $4 \times 3 = 12$ なら、重心は、数のように 2 数の平均となる。 $4 \times 4 = 16$ の場合は、重心の数は 4 数の平均となる。平均数は有理数なので、この数に 16 を乘じると整数に戻る。

$$4 \times 4 = 16$$

MON	TUE	WED	THU	FRI	SAT	SUN
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29		

$$(12 + 13 + 19 + 20) / 4 = 16$$

$$16 \times 16 = 256$$

$$4 \times 3 = 12$$

MON	TUE	WED	THU	FRI	SAT	SUN
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29		

$$(14 + 15) / 2 = 14.5$$

$$14.5 \times 12 = 174$$

九は魔法数ではない (“Nine” isn’t the magic number)

9 という数字には、9 去法とか 9 の段の九九とか、なにかと面白い数字といわれる。

例えば、九九の 9 の段では、

$$\begin{array}{ll} 9 \times 2 = 18 & 9 \times 9 = 81 \\ 9 \times 3 = 27 & 9 \times 8 = 72 \\ 9 \times 4 = 36 & 9 \times 7 = 63 \\ 9 \times 5 = 45 & 9 \times 6 = 54 \end{array}$$

同じ数字が順序を変えて現われる。その桁の数字を足すと 9 になる(数字根)。

そこで、9 を魔法数とか、特別な数としているが、それは 10 進数での話である。

10 進数は特別なものではなく。3 進法でも 5 進法でも、計算はできる。

人類は たまたま 10 本の指を使って 10 進数を使い始めた。

指が 6 本、7 本という生物 があれば別の進法が一般的になっていたことだろう。

もし、4 本指の知的生物なら、8 進数を標準にしているかもしれない。

そして、彼らは、人類が 10 進数で 9 という数字に魔法のような不思議さを感じたように、以下の理由で 7 を特別な数と思うに違いない。

$$\begin{array}{ll} 7 \times 2 = 16 & 7 \times 7 = 61 \\ 7 \times 3 = 25 & 7 \times 6 = 52 \\ 7 \times 4 = 34 & 7 \times 5 = 43 \end{array}$$

なぜ n 進法の $n-1$ の数字が、このような結果になるのか考えてみる。

すべての10進数での九九の結果の数字根を求めて表にしてみると答えが見える。

1 23456789

2 46813579

3 69369369

4 83726159

5 16273849

6 39639639

7 53186429

8 76543219

9 99999999

9番目の行と列の数字根はすべて9になる。

ちなみに、9行9列を除いたものは、半群 $\{J/(9), X\}$ になる。

$J/(9)$ とは、9を法とする剰余類で分けられた整数の集合であり、 X はこの半群(semigroup)上の元の間での抽象乗算を意味する。

a と b が、 $\{J/(9), X\}$ の元であるとき、 $a \times b$ は mode 9 となる。