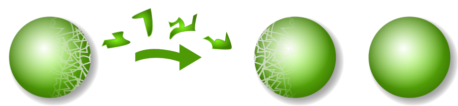
バナッハ=タリスキーのパラドックス

定理：球を3次元ユークリッド空間内で有限個の部分に分割し、それらを回転・平行移動操作のみを使いうまく組み替えることで、元の球と同じ半径の球を2つ作ることができる。

無限の集合から1個ずつ取り出すとは、どういうことだろうか。そもそも、そんなことができるのか？



どうにも、常識から逸れた話だが、数学的には矛盾しないことを証明できる。故に、バナッハタルスキーの定理はパラドックスともいわれている。

このパラドックスを引き出すには、２つのポイントがある。ひとつは、球が点で構成される無限集合だということと、もうひとつには、点を取り出す際に、平行移動と回転という操作を入れて、同じものを選択せずに取り出せることだ。
つまり、無限の集合から1個ずつ取り出す選択公理と同じことを述べていることになる。

それでは、検証をしてみよう。
単位球 を、$D = \{ (x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$

$$D = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_l$$

と分割できるものとする。

ここで、$A \sqcup \cdots \sqcup Z$ は $A, \ldots, Z$ の直和集合である。
すなわち、$A, \ldots, Z$ の和集合 $A \cup \cdots \cup Z$ のことだが、$A, \ldots, Z$ はどの2つも共通部分を持たないことを要請される。
さらに A_i 及び B_j と 合同な A'_i 及び B'_j で 、

$$D = A'_1 \sqcup \cdots \sqcup A'_k = B'_1 \sqcup \cdots \sqcup B'_l$$

を満たすものを見つけてくることができる。

合同な図形の体積は同じなので、
空間図形 C の体積を $m(C)$ と書くことにすると、

$$\begin{aligned} m(D) &= m(A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_k \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_l) \\ &= m(A_1) + \cdots + m(A_k) + m(B_1) + \cdots + m(B_l) \\ &= m(A_1') + \cdots + m(A'_k) + m(B'_1) + \cdots + m(B'_l) \\ &= m(A'_1 \sqcup \cdots \sqcup A'_k) + m(B'_1 \sqcup \cdots \sqcup B'_l) \\ &= m(D) + m(D) \end{aligned}$$

となる。

上の操作は、1 = 2 を主張している。これが上の定理がパラドックスと呼ばれる理由である。

しかし、常識とかけ離れた結果を導くのは、分割されるものと、その分割方法に理由がある。球は、点が詰まったもの(集合)として数学では捉える。点には大きさ=体積も重さもない。
したがって集合は、無限集合になる。無限集合から一個ずつ取り出しが可能とするのは選択公理に任せたとして、どんな分割なら同じ球がもう一つできるのか。それを、正則樹木グラフで説明する。

グラフ T の頂点の集合を V とし、基準となる頂点 $o \in V$ を1つ選ぶ。

頂点集合 V 上の写像$\Phi_A : V \to V$ を、各頂点を一歩東へ動かす写像とする。その逆写像 ϕ_A^{-1}

は各頂点を一歩西 へ動かす写像である。同様に Φ_B を、各頂点を一歩北へ動かす写像とする。

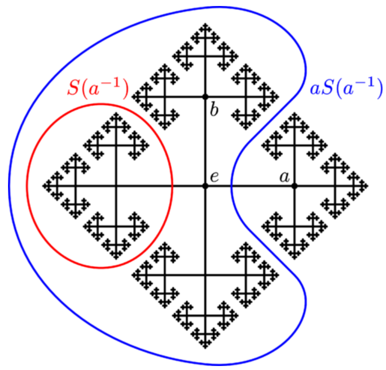
例えば $\phi_B^{-1} \circ \phi_A^{-1} \circ \phi_B \circ \phi_A$ は、東へ動いた後、北へ動き、さrsに西へ動き、南へ動く写像である。
碁盤の目のような道路なら元へ戻れるが、このグラフでは元に戻ることはない。
Φ_B と Φ_A が非自明な関係式を一切満たさない。つまり、Φ_A の非自明なベキと ΦB の非自明なベキを交互に合成した写像は決して恒等写像にならない。実際、Φ がそのような写像であるとしよう。

$$\phi = \phi_A^{m_1} \circ \phi_B^{n1} \circ . . . \circ \phi_A^{mk} \circ \phi_\beta^{nk}, m_1 ... m_k, n_1 . . . n_k \in Z - \{0\}$$

ただし他にも、左端が Φ_B のベキである、右端が Φ_A のベキである、単に Φ_A あるいは Φ_B のみのベキであってもう一方は出てこないなどの可能性がある。このとき Φ を基準点 o に適用すると、先ずは Φ_{nk} で南北方向に動き、さらに Φ_{mk} で東西方向に動き･･･となって逆戻りすることがないため、決 BAして基準点 o には戻ってこない。さらに Φ の表示は $\Phi(o)$ によって一意的に決まる。写像全体の集合は恒等写像 Id と合わせて(V 上の)変換群は自由群F と書く。

4-正則樹木グラフ T の頂点集合 V は、バナッハ=タルスキーのパラドックスの簡易版となること見做す。各頂点 p に対して、o から p へ行く順路を考え、最後のステップが Φ_A(東行)であるような頂点 p 全体の集合を V_A と書くことにする。すなわち V_A は、 a のラベルがついている頂点たちの集合である。同様に最後のステップがϕ^{-1} である頂点た Aちの集合を V_A と書くことにする。V_B, V_B も同様に定めたい が、そうすると$V_A \sqcup V_A \sqcup V_B \sqcup V_B = V - \{o\}$となり都合が悪 いので、基準点 o の真北方向、真南方向にある頂点は全て V_B に属するものとする。これで、V_A, V_A, V_B, V_B は V の分割を 与えることになる。
$V = V_A \sqcup V_A \sqcup V_B \sqcup V_B$

一方、図からも分かるように、 $V = V_A \sqcup \Phi_A(V_A) = V_B \sqcup \Phi_B(V_B)$となり、V を分割した4つのピースを2組に分け、それぞれの組の一方を平行移動させて組み合わせることで、Vを2個えることができる。



References

1. 平成27年度(第37回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所，平成27年8月3日~8月6日開催