森を見て木を見る

Break down from global to local

前層、連接層、層の茎

Сейджиро Кусафуса

層の歴史

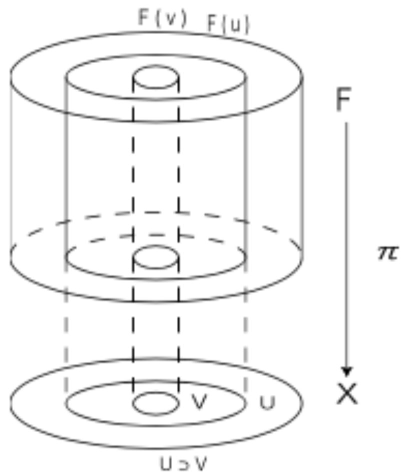
層の概念が最初にはっきりと現れたのは、第二次世界大戦中のジャン・ルレーによる偏微分方程式の研究だと言われている。その後、アンリ・カルタンのセミナーで形式的な整備が進められた。さらに任意の係数体上の多様体にコホモロジー理論を構築することを目的の一つとして、1955年にジャン＝ピエール・セールによって代数幾何学に層の概念が持ち込まれた。アレクサンドル・グロタンディークによりこの考えが推し進められ、スキーム上有意義な「層」を表現しうるトポスの概念が得られた。ほかに層が決定的に用いられる理論として佐藤幹夫らに端を発する偏微分方程式系の解析（D-加群の理論）があげられる。

層 Sheaf

連接 Coherent とは、有限生成のことだ

X上の前層F とは、Xの開集合の圏$T_{op}(X)$からの

アーベル群の圏Ab(X)への反変関手である



層 sheaf

位相空間上で連続的に変化する様々な数学的構造をとらえるための概念

大域的なデータを局所的に取り出すこと

局所的なデータの貼り合わせの可能性によって定式化される

前層であって、貼り合わせを満たすものを層と呼ぶ

大域から局所への移行のみを考える概念は**前層** presheaf という

(X, T) を位相空間とする。X の開集合 $U \in T$ に対し集合 $F(U)$ を対応付けるとき、開集合の包含関係 $U \subset V$ に応じて制限写像 $\rho U,V : F(V) \to F(U)$ が定まり、次の条件が成立する

$$\rho_{U,u} = identity$$

$$U \subset V \subset W \Rightarrow \rho_{U,w} = \rho_{U,V} \cdot \rho_{V,w}$$

そのとき集合と写像の族 $F = \{(F(U))_{U \in T}, (\rho_U{}^V)_{U,V \in T; U \subseteq V}\}$ を X を**底空間**といい、その集合に値を持つ写像の族を**前層**（または簡単に X 上の集合の前層）と呼ぶ
各開集合 U に対応付けられる $F(U)$ がどれも加群の構造を持ち、制限写像がどれも加群の準同型となっているならば X 上の加群の前層、同じく $F(U)$ がどれも環であって制限写像がどれも環準同型ならば X 上の環の前層、といったように $F(U)$ たちのもつ構造によって前層をクラスに分けることができる

各開集合 U に対して $F(U)$ の元を前層 F の U 上の**切断**（せつだん、*section*）あるいは**断面**（だんめん）と呼ぶ
開集合の包含関係 $U \subset V$ と V 上の切断 $s \in F(V)$ が与えられたとき、$s \mid u := \rho_{U,u}$
と書く。$s \mid u$ を切断 s の U への**制限** restriction と呼ぶ