Appendix

Proof below Cyclic Group theorem.

Suppose you move pieces with **D** or **E** in 3x3x3 Rubik's cube so that the first and second layers are not destroyed. three pieces on 3rd tier changed their arrangement. Repeat the same move three times, then they will be restored.

In the case of **C** or **C'**, the arrangement of the six pieces changes. In other words, if you perform iterative 6 iterations, it returns.

Tip: Of 3 x 3 pieces, the center one is fixed so it is an identify permutation piece, and eight are commutable.

Think about this in the same cycle group "Ghost legs".
When I pulled out the five legs of the foot, two were the identify permutation and three were replaced.

Then, when you repeat the same Ghost legs 3 times, all return to the original foot (identify permutation ***e***)
(① → ③, ② → ①, ③ → ②), (③ → ②, ① → ③, ② → ①), (② → ①, ③ → ②, ① → ③)

Theorem 1:
Connecting ***n*** - ***m*** isomorphic excluding the identify permutation ***m*** in the cyclic group of n Ghost legs becomes the identify permutation ***e***.

Theorem 2:
In the cyclic group of order 5, connecting the same permutation of 5! becomes the identify conversion ***e***.

Lemma :
Suppose 3 pieces have changed their positions by your any moves n 3x3x3 cube. You could restore their pieces by the 3 times (repetition) of the same moves.

If you connect 5 pieces of the same 5 Ghost legs, it becomes identity of cyclic group. So theorem 1 is the same as a lottery.

Proof :
As to a finite group ***G***, if |G| = n, g^n = ***e*** holds for arbitrary g ∈ ***G***.

Considering the number of Ghost legs of n, the n-th symmetric group {Sn} corresponds to this.

Since ISnI = n! and the identify element did not change the numbers at all, the allegation of the cyclic group is that if you connect n! Pieces of the same structure of sticks, the position of the first bar no matter where you start .

Likewise, from the assertion of the cyclic group, the cyclic group of three pieces returns to the original by permutations of 3!.

循環群

3x3x3 ルービックキューブで、1層目と2層目を壊さないようにしてピースを***D***またはE で動かしたとする。すると、3層上で3個のピースがその配列を変えた。同じ動きを3回繰り返すと元に戻る。

また、***C***または***C’***の場合、6個のピースの配置が入れ替わるので、6回の繰り返しで元に戻る。

ヒント:
3 x 3 のピースのうち、 1個は固定だから恒等変換ピースで、8個が可換。
これを同じ循環群である「あみだくじ Ghost legs」で考える。

5本の足のあみだくじを引いたとき、2本が恒等変換で、3本が入れ替わった。
すると、同じあみだくじを3回繰り返すと、すべて元の足に戻る(恒等変換 ***e***)
(①→③、②→①、③→②)、 (③→②, ①→③, ②→①)、(②→①, ③→②, ①→③)

定理1
n本の足の循環群で、恒等変換mを除く n-m個の同型の変換を繋げると、恒等変換 ***e*** になる。

定理2
位数5の循環群で、5!の巡回を繋げると、恒等変換 ***e*** になる。

証明
有限群 G について、IGI = n ならば任意の g ∊ G に対して g^n = ***e*** が成り立つ。
足の数が n 本のあみだくじを考えると、これに n 次の対称群 Sn が対応する。
 ISnI = n! であり単位元は数字をまったく入れ換えないようなものであったから、 巡回群の主張は同じ構造のあみだくじをn! 個接続すれば、どこからスタートしても最初の棒の位置にたどり着く。
同様に、巡回群の主張から、3個のピースの巡回群は、3! の巡回で元に戻る。