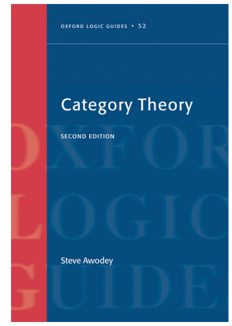
圏論の基礎 category theory




## 1.1 What is category theory?

As a first approximation, one could say that category theory is the mathematical study of (abstract) algebras of functions. Just as group theory is the abstraction of the idea of a system of permutations of a set or symmetries of a geometric object, category theory arises from the idea of a system of functions among some objects.

## 1.1 カテゴリ理論とは何か？

まず、概略として、カテゴリ理論は関数の(抽象)代数の数学的研究であるということができる。グループ理論は、幾何学的オブジェクトのセットまたは対称性の順列のシステムのアイデアを抽象化するのと同様に、カテゴリ理論はいくつかのオブジェクト間の機能システムのアイデアから生じる。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}
$$

We think of the composition g ◦ f as a sort of “product” of the functions f and g, and consider abstract “algebras” of the sort arising from collections of functions. A category is just such an “algebra,” consisting of objects A, B, C, . . . and arrows f : A → B, g : B → C, . . . , that are closed under composition and satisfy certain conditions typical of the composition of functions. A precise definition is given later in this chapter. A branch of abstract algebra, category theory was invented in the tradition of Felix Klein's Erlanger Program, as a way of studying and characterizing different kinds of mathematical structures in terms of their “admissible trans-formations.” The general notion of a category provides a characterization of the notion of a “structure-preserving transformation,” and thereby of a species of structures admitting such transformations.

関数g◦fは、関数fと関数gの「積」の一種であり、関数の集まりから生じるソートの抽象「代数」を考える。カテゴリは、オブジェクトA、B、C、. . . で構成されるそのような "代数"である。矢印f：A→B、g：B→C, . . .。それらは組成下で閉じられ、機能の組成の典型的な特定の条件を満たす。正確な定義については、この章の後半で説明する。抽象代数学の範疇であるカテゴリ理論は、Felix KleinのErlanger プログラムの伝統の中で、さまざまな種類の数学的構造を「許容可能な変換」という観点から研究し、特徴付ける方法として考案された。「構造を保存する変容」という概念の特徴付け、それによってそのような変容を認めている種の構造の特徴付けを行う。

The historical development of the subject has been, very roughly, as follows:
1945 Eilenberg and Mac Lane's “General theory of natural equivalences” was the original paper, in which the theory was first formulated. Late 1940s The main applications were originally in the fields of algebraic topology, particularly homology theory, and abstract algebra. 1950s A. Grothendieck et al. began using category theory with great success in algebraic geometry. 1960s F.W. Lawvere and others began applying categories to logic, revealing some deep and surprising connections. 1970s Applications were already appearing in computer science, linguistics, cognitive science, philosophy, and many other areas.

カテゴリ理論の歴史的発展を大まかに以下に示す:

1945エイレンベルクとマック・レーンによる「自然な同値性の一般理論」は、理論が最初に定式化されたオリジナルとなるの論文。1940年代後半、主な応用は、代数的トポロジ、特に相同性理論、抽象代数の分野。1950年代 アレキサンドル・グロダンティエク他、代数幾何学において、大成功を収めたカテゴリ理論を使い始めた。1960年代のフランシス・ウィリアム・ローヴェアらは、ロジックにカテゴリーを適用し始め、深く驚くべき関係を明らかにした。1970年代には、コンピュータサイエンス、言語学、認知科学、哲学、その他多くの分野に登場していた。

One very striking thing about the field is that it has such wide-ranging applications. In fact, it turns out to be a kind of universal mathematical language like set theory. As a result of these various applications, category theory also tends to reveal certain connections between different fields—like logic and geometry. For example, the important notion of an adjoint functor occurs in logic as the existential quantifier and in topology as the image operation along a continuous function. From a categorical point of view, these turn out to be essentially the same operation. The concept of adjoint functor is in fact one of the main things that the reader should take away from the study of this book. It is a strictly category-theoretical notion that has turned out to be a conceptual tool of the first magnitude—on par with the idea of a continuous function. In fact, just as the idea of a topological space arose in connection with continuous functions, so also the notion of a category arose in order to define that of a functor, at least according to one of the inventors. The notion of a functor arose—so the story goes on—in order to define natural transformations. One might as well continue that natural transformations serve to define adjoints:

この分野の1つの非常に目立つ点は、そのような幅広い応用 application があることだ。実際、それは集合理論のような普遍的な数学的言語の一種であることが分かる。これらのさまざまな応用の結果として、カテゴリ理論はまた論理学 logic と幾何学 geometry のような異なるフィールド間の特定の接続を明らかにする傾向がある。例えば、随伴関手 adjoint functor の重要な概念は、存在量限定子として論理的に、そして連続関数に沿った画像操作としてトポロジーにおいて生じる。カテゴリの観点から見ると、これらは本質的に同じ操作であることが分かる。adjoint functorの概念は、実際には読者がこの本の研究から取り除くべき主なものの1つだ。これは厳密にカテゴリー理論的概念であり、継続的な機能という考え方に基づく最初の規模の概念的ツールであることが判明した。実際、位相空間の概念が連続的な機能に関連して発生したのと同様に、少なくとも発明者の一人によれば、関手functor の概念を定義するためにカテゴリの概念も生じた。ファンクタの概念が生まれたので、自然の変容を定義するためにその話が続く。自然の変形が随伴物を定義するのに役立つ。

Category, Functor, Natural transformation, Adjunction
Indeed, that gives a good outline of this book. Before getting down to business, let us ask why it should be that category theory has such far-reaching applications. Well, we said that it is the abstract theory of functions, so the answer is simply this:

カテゴリー、ファンクタ、自然変換、添加
確かに、それはこの本の良い概要を与える。話を始める前に、そのカテゴリーの理論がそのような幅広いアプリケーションを持っている理由を尋ねる。さて、関数の抽象理論だと答えたので、答えは単純です：

Functions are everywhere!
And everywhere that functions are, there are categories. Indeed, the subject might better have been called abstract function theory, or, perhaps even better: archery.

関数はどこにでもあります！機能があるところには、カテゴリがあります。
確かに、サブジェクトは抽象的な機能理論と呼ばれる方が良いかもしれません。

## 1.2 Functions of sets

We begin by considering functions between sets. I am not going to say here what a function is, anymore than what a set is. Instead, we will assume a working knowledge of these terms. They can in fact be defined using category theory, but that is not our purpose here. Let f be a function from a set A to another set B, we write **f : A → B**.

1.2 セットの機能
まず、セット間の関数を考えることから始めます。私はここで、何が機能しているのか、何がセットなのか、もう何も言いません。代わりに、私たちはこれらの用語の実用的な知識を前提とします。実際にはカテゴリ理論を使って定義することができますが、それはここでの目的ではありません。 fを集合Aから別の集合Bへの関数とすると、f：A→Bと書く。

To be explicit, this means that f is defined on all of A and all the values of f are in B. In set theoretic terms, **range(f) ⊆ B**.

明示的には、これは、fがすべてのAで定義され、fのすべての値がBにあることを意味します。
範囲（f）⊆B。

Now suppose we also have a function g : B → C,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

then there is a composite function g ◦ f : A → C, given by (g ◦ f)(a) = g(f(a)) a ∈ A. (1.1)

Now this operation “ ∘ ” of composition of functions is associative, as follows. If we have a further function h : C → D

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}
$$

and form h ∘ g and g ∘ f, then we can compare (h ∘ g) ∘ f and h ∘ (g ∘ f) as indicated in the diagram given above. It turns out that these two functions are always identical,
(h ∘ g) ∘ f = h ∘ (g ∘ f)

since for any a ∈ A, we have

((h ∘ g) ∘ f)(a) = h(g(f(a))) = (h ∘ (g ∘ f))(a)

using (1.1).

By the way, this is, of course, what it means for two functions to be equal: for every argument, they have the same value. Finally, note that every set A has an identity function 1A : A → A given by 1A(a) = a.

ちなみに、これはもちろん、2つの関数が等しいことを意味する。すべての引数について、それらは同じ値を持つ。最後に、すべての集合Aは、恒等関数1Aを有することに留意されたい：A→A、1A（a）= a

These identity functions act as “units” for the operation ∘ of composition, in the sense of abstract algebra. That is to say, f ∘ 1A = f = 1B ∘ f. for any f : A → B.

これらのアイデンティティ関数は、抽象代数という意味で、合成の操作∘の「単位」として機能する。つまり、f∘1A = f = 1B∘fである。任意のf：A→Bの場合

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "f \circ 1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "1_B \circ f"] & \\
& B \arrow[r, "1_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

These are all the properties of set functions that we want to consider for the abstract notion of function: composition and identities. Thus, we now want to “abstract away” everything else, so to speak. That is what is accomplished by the following definition.

これらは、関数の抽象概念である構成とアイデンティティについて考慮する必要がある集合関数のすべてのプロパティである。したがって、現在、他のすべてを「抽象化」したいと考えている。それは次の定義によって達成される。

1.3 Definition of a category
Definition 1.1. A category consists of the following data:
• Objects: A, B, C, . . .
• Arrows: f, g, h, . . .
• For each arrow f, there are given objects
dom(f), cod(f)
called the domain and codomain of f. We write
$f : A \to B$

to indicate that A = dom(f) and B = cod(f).
• Given arrows $f : A \to B$ and $g : B \to C$, that is, withcod(f) = dom(g)

there is given an arrow
$g \circ f : A \to C$

called the composite of f and g.
• For each object A, there is given an arrow
$1A : A \to A$

called the identity arrow of A.
These data are required to satisfy the following laws:
• Associativity:
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

for all $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$.

• Unit:
$f \circ 1A = f = 1B \circ f$

for all $f : A \to B$.

A category is anything that satisfies this definition—and we will have plenty of examples very soon. For now I want to emphasize that, unlike in Section 1.2, the objects do not have to be sets and the arrows need not be functions. In this sense, a category is an abstract algebra of functions, or “arrows” (sometimes also called “morphisms”), with the composition operation “ ○ ”

as primitive. If you are familiar with groups, you may think of a category as a sort of generalized group.

1.3 カテゴリの定義

定義1.1 カテゴリは、次のデータで構成される。

•オブジェクト：A、B、C、. . .

•矢印：f、g、h、. . .

•各矢印fに対して、与えられたオブジェクト

dom（f）、cod（f）

fのドメインおよびコードドメインと呼ばれる。

$f$：$A \to B$ と書くのは、

$A = dom$（$f$）および$B = cod$（$f$）であることを示す。

与えられた矢印$f$：$A \to B$および$g$：$B \to C$、すなわち、withcod（$f$）= dom（$g$）

矢印が与えられている

$g \circ f$：$A \to C$

fとgの複合体と呼ばれる。

•各オブジェクトAに対して、矢印が与えられる。

$1A$：$A \to A$

これは、Aの識別矢印と呼ばれる。

これらのデータは、以下の法律を満たす必要がある。

•結合性：

$h \circ$（$g \circ f$）=（$h \circ g$）$\circ f$

すべての$f$：$A \to B$、$g$：$B \to C$、$h$：$C \to D$

• 単位：

$f \circ 1A = f = 1B \circ f$

すべての$f$：$A \to B$について

カテゴリはこの定義を満たすもので、すぐにたくさんの例がある。ここでは、セクション1.2とは異なり、オブジェクトはセットである必要はなく、矢印は機能である必要はないことを強調したい。この意味で、カテゴリは関数の抽象代数であり、射、モルフィズムとも呼ばれるものであり、合成操作○がプリミティブである。あなたが群論に精通しているなら、あなたはカテゴリを一種の一般化された群論と思うかも知れない。

Duality 双対性

Groups and categories 群と圏

Limits and colimits 極限と余極限

Exponentials 指数

Naturality 自然性

Categories of diagrams

Adjoints 随伴

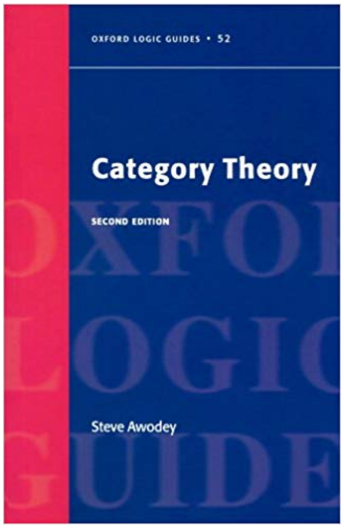
Monads and algebras モナドと

Derived category. 導来圏 グロダンティエク

Abelian category アーベル圏

Additive category 加法圏

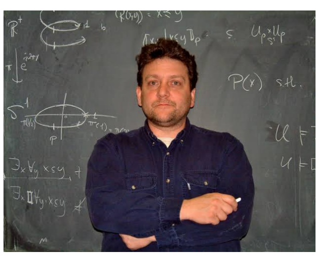
書評と著者について




Category theory is a branch of abstract algebra with incredibly diverse applications. This text and reference book is aimed not only at mathematicians, but also researchers and students of computer science, logic, linguistics, cognitive science, philosophy, and any of the other fields in which the ideas are being applied. Containing clear definitions of the essential concepts, illuminated with numerous accessible examples, and providing full proofs of all important propositions and theorems, this book aims to make the basic ideas, theorems, and methods of category theory understandable to this broad readership.

Although assuming few mathematical pre-requisites, the standard of mathematical rigour is not compromised. The material covered includes the standard core of categories; functors; natural transformations; equivalence; limits and colimits; functor categories; representables; Yoneda's lemma; adjoints; monads. An extra topic of cartesian closed categories and the lambda-calculus is also provided - a must for computer scientists, logicians and linguists!

This Second Edition contains numerous revisions to the original text, including expanding the exposition, revising and elaborating the proofs, providing additional diagrams, correcting typographical errors and, finally, adding an entirely new section on monoidal categories. Nearly a hundred new exercises have also been added, many with solutions, to make the book more useful as a course text and for self-study.



Steve Awodey, a Professor of Philosophy and Mathematics at Carnegie Mellon University.