クラスター代数、
デンキン図、
クラインの特異点、
ルート系
正多面体

С. Кусафуса

菱形にならんだ数

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$$

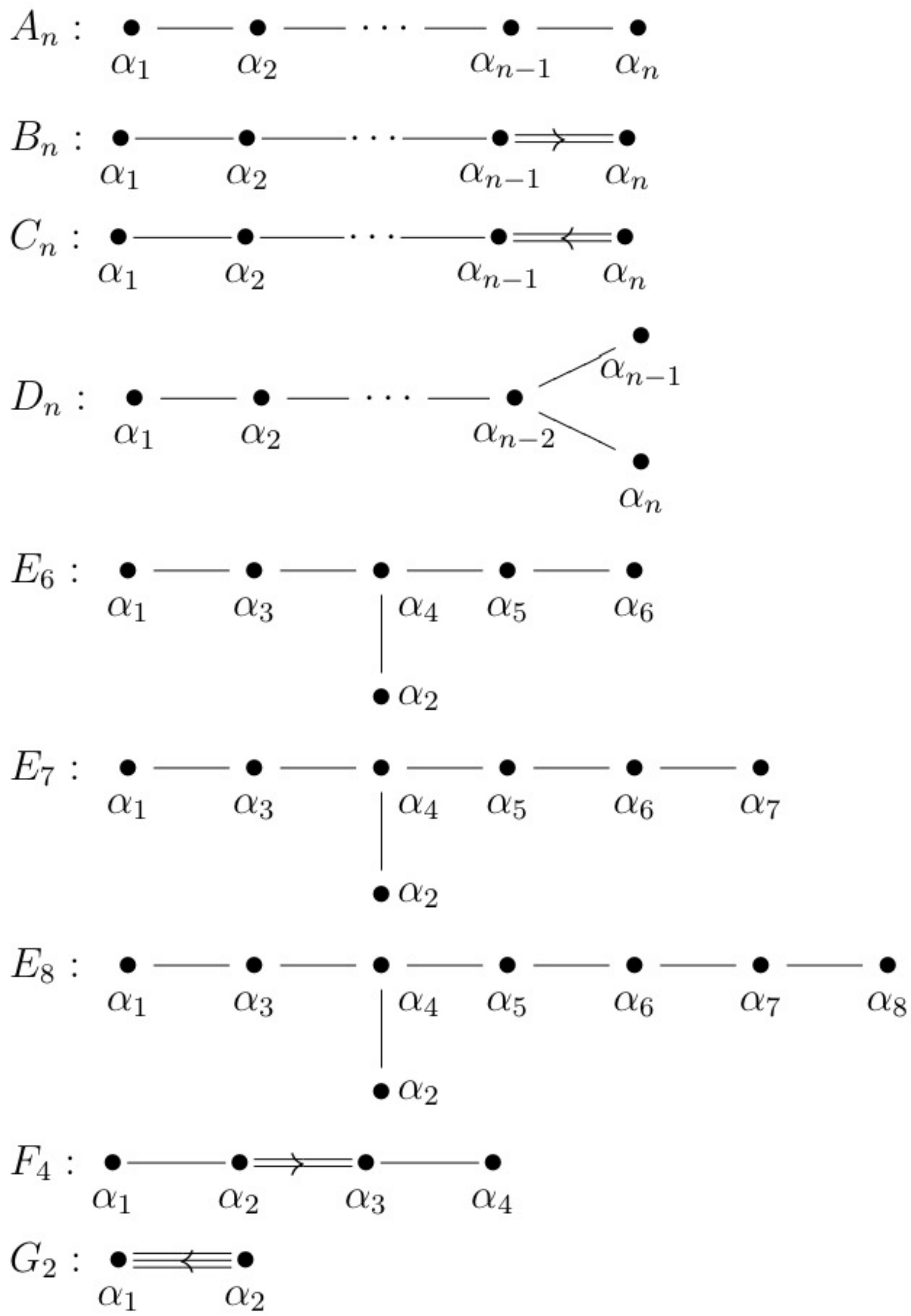
が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & 1 & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}$$

定理 1.1. (1) このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。

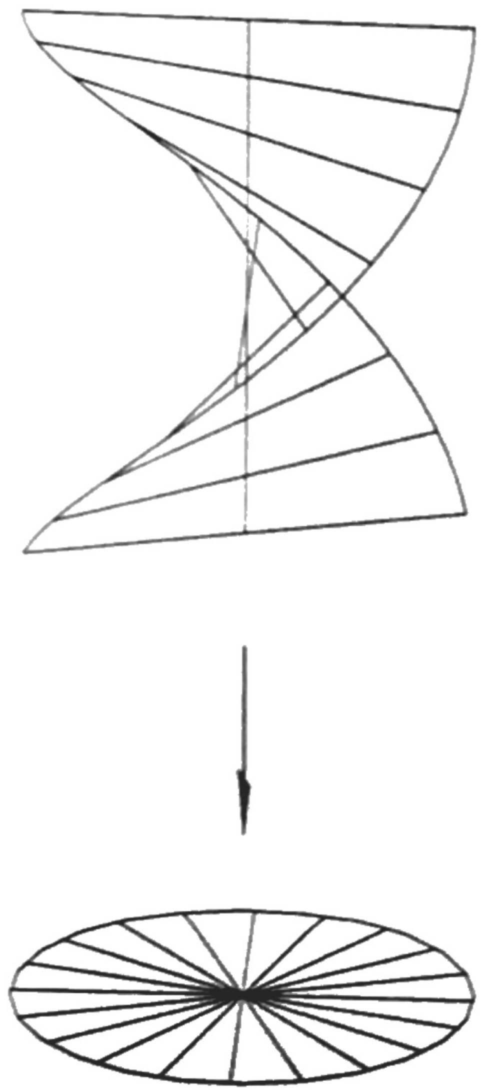
(2) しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

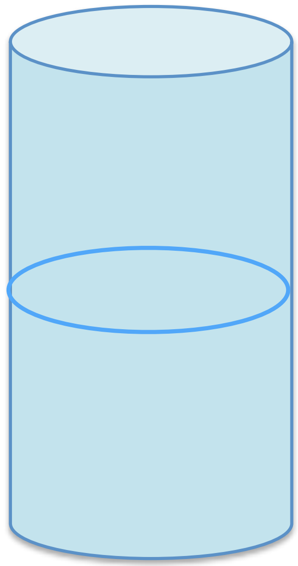
デンキン図



A_n : α_1 α_2 $\cdots$ α_{n-1} α_n
B_n : α_1 α_2 $\cdots$ α_{n-1} α_n
C_n : α_1 α_2 $\cdots$ α_{n-1} α_n
D_n : α_1 α_2 $\cdots$ α_{n-2} α_{n-1} α_n
E_6 : α_1 α_3 α_4 α_5 α_6 α_2
E_7 : α_1 α_3 α_4 α_5 α_6 α_7 α_2
E_8 : α_1 α_3 α_4 α_5 α_6 α_7 α_8 α_2
F_4 : α_1 α_2 α_3 α_4
G_2 : α_1 α_2

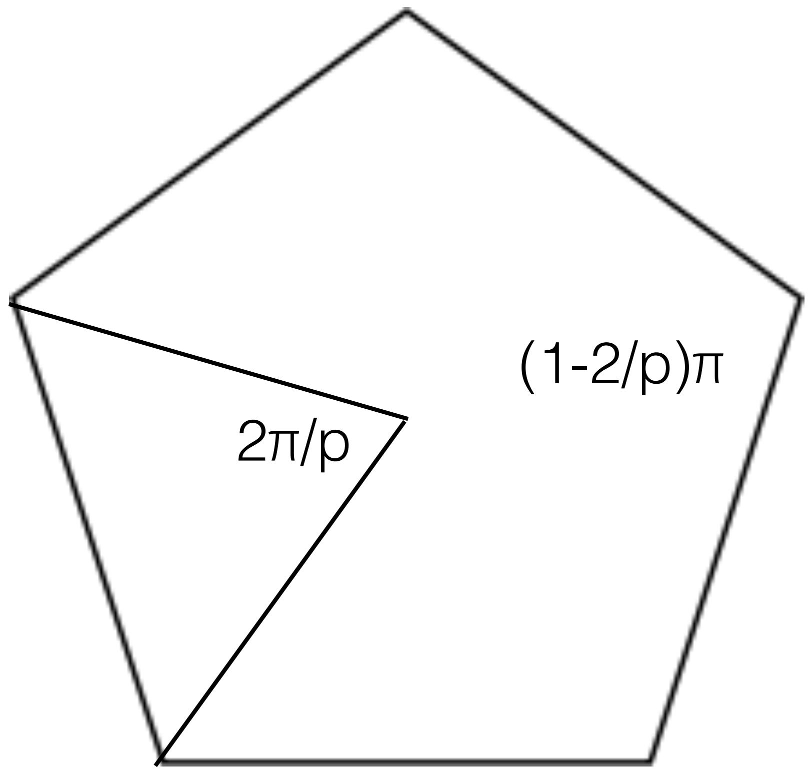
Blow up





正n面体	正q角形	r個の面
4	3	3
6	4	3
8	3	4
12	5	3
20	3	5

正p角形



正P角形、頂点の周りにq個

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$$

をみたす正の整数の組み (p, q, r)をすべて求めよ.

$(m, l - m +1, 1)$, $1 <= m <= l$

$(\mathcal{L} - w, 2, 2)$, $4 <= l$

$(3, 3, 2)$, $(4, 3, 2)$, $(5, 3, 2)$

pとqを入れ替える →双対多面体

$\left(1-\frac{2}{p}\right)\cdot\pi\cdot q<2\pi$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}>1$

(p, q) = (p,2), (2,q)

(3,3), (3,4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)

穴の開いていない多面体、すなわち球面に位相同型な多面体については、
頂点v、辺e、面fの数について、頂点の数v - 辺の数 e+ 面の数f = 2
が成り立つ。これをオイラーの多面体定理
(シュレーフリの定理の3次元での特殊ケー)

穴の開いている多面体の場合には、種数（穴の数）を g とすると、

頂点の数 v- 辺の数e + 面の数f = **2 - 2g**

この値を**オイラー標数**と呼ぶ。

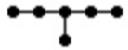
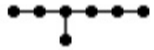
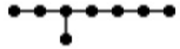
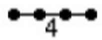
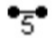
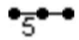
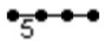
種数 g の多面体の面 $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$ (最大の整数)

色で塗り分けることができる g = 0 のときこの式の値は4となり、四色定理を示す。

鏡の数、部屋の数と巾指数

型	鏡の数. m	部屋の数. g	巾指数. d	備考
An	n(n+1)/2	(n+1)!	1, 2, . . . n	正四面体の高次元版n>=1
Bn	n^2	n^2.n!	1, 3, 5, ...2n-1	正六面体の高次元版n>=2
Dn	n(n-1)	n^(n-1) . n!	1, 3, 5, ...2n-3, n-1	n>=4
E6	36	2^7 . 3^4 . 5	1, 4, 5, 7, 8, 11	
E7	63	2^10 . 3^4 . 5 . 7	1, 5, 7, 9, 11, 13, 17	
E8	120	2^14 . 3^5 . 5^2 . 7	1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	
F4	24	2^7 . 3^2	1, 5, 7, 11	
G2	6	12	1, 5	
H3	15	120	1, 5, 9	正十二面体、正二十面体
H4	60	2^6 . 3^2 . 5^2	1, 11, 19, 29	
I2(m)	m	2m	1, m-1	
	m = d1+ d2+....dn	g=(1+d1)(1+d2)....(1+dn)		部屋の数gは、鏡映群の位数

有限コクセター群の分類

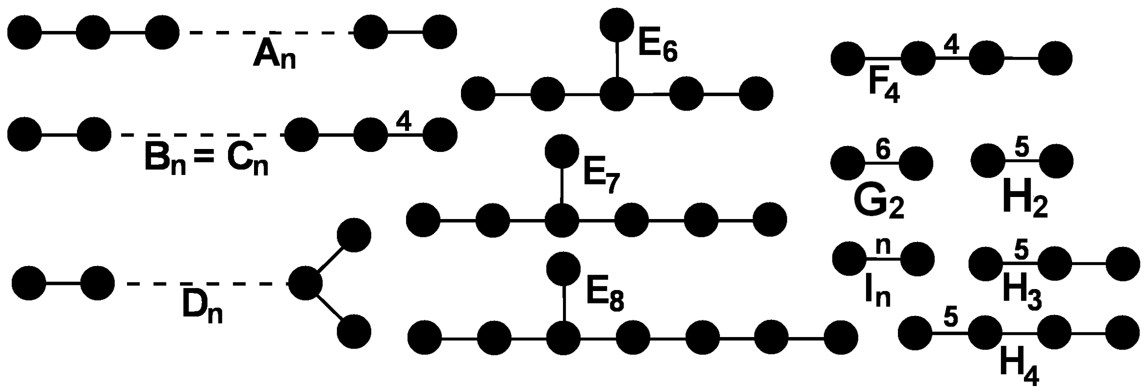
記号	別表記	括弧記法	階数	位数	対応する多胞体	コクセター=ディンキン図形
A_n	A_n	$[3^n]$	n	$(n+1)!$	n-次元単体	
BC_n	C_n	$[4,3^{n-1}]$	n	$2^n\, n!$	n-次元超立方体 / n-次元交叉正多胞体	
D_n	B_n	$[3^{n-3,1,1}]$	n	$2^{n-1}\, n!$	n-次元半超立方体	
E_6	E_6	$[3^{2,2,1}]$	6	72x6! = 51840	2_{21}, 1_{22}	
E_7	E_7	$[3^{3,2,1}]$	7	72x8! = 2903040	3_{21}, 2_{31}, 1_{32}	
E_8	E_8	$[3^{4,2,1}]$	8	192x10! = 696729600	4_{21}, 2_{41}, 1_{42}	
F_4	F_4	[3,4,3]	4	1152	正24胞体	
G_2	-	[6]	2	12	正六角形	
H_2	G_2	[5]	2	10	正五角形	
H_3	G_3	[3,5]	3	120	正二十面体/正十二面体	
H_4	G_4	[3,3,5]	4	14400	正120胞体/正600胞体	
$I_2(p)$	D_2^p	[p]	2	$2p$	正 p-角形	

Wikipediaから

コクセター群(Coxeter group)とは鏡映変換で表示できる抽象群

有限コクセター群は何らかのユークリッド鏡映群(一般次元正多胞体の対称変換群など)

コクセター群は鏡映群の抽象化として導入、有限コクセター群の分類は1935年に完了



一般次元正多胞体の対称変換群や単純リー代数のワイル群は有限コクセター群の例

ユークリッド平面や双曲平面の正則三角形分割 (regular tessellation) に対応する三角群や

無限次元カッツ-ムーディ代数のワイル群に、無限コクセター群の例がある

ベッチ数に隠された巾指数

鏡の補集合のなす複素多様体

$M = \{(x1, \ldots., xn)\} \in C^n \mid \alpha i\ (x1, \ldots., xn) \neq 0\ (i=1, \ldots, m)$

k次元ベッチ数　Bk(M)とし、Mのポアンカレ多項式を

$Poin(M) = \Sigma\, B(M)t^k,\ \ k \geqq 0$

巾指数が、d1, d2, …dnのときのMのポアンカレ多項式

$Poin(m, t) = (1+d1\ t)(1+d2\ t). . . (1+dn\ t)$

メビウス関数とベッチ関数の関係

$Poin\ (G, t) = Poin\ (M, t)$

群の不変部分空間に隠された巾指数

固定部分空間

$$\mathrm{Fix}(g) := (v \in V \mid g(v) = v)$$

固定部分空間の次元と巾指数の関係

$$\Sigma\, t^{n-\dim \mathrm{FIX}(g)} = (1+d_1 t)(1+d_2 t) \ldots (1+d_n t),\quad g \in G$$
$$= \mathrm{Poin}(G, t)$$

簡単なn=2, 鏡の数2=m

$$\Sigma\, t^{n-\dim \mathrm{FIX}(g)} = 1t^{2-2} + mt^{2-1} + (m-1)t^{2-0},\quad g \in G$$
$$= 1+mt+(m-1)t^2$$
$$= (1+t)\{1+(m-1)t\}$$