

## 級数と有限和

次の級数seriesをみなさい。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

さて、この級数は、何を意味しているのか。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x$$

に似ている。また、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \log(1+x)$$

にも、似ている。そもそも、収束するかどうかから、チェックしよう。

$$a_n = \frac{x^n}{n} \quad \text{とおくと、}$$

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{(x^n + 1)_n}{(n+1)x^n} = x \frac{n}{n+1}$$

さて、 $n \rightarrow \infty$  とすると、

$$x \frac{n}{n+1} \Big|_{x \rightarrow \infty} = x$$

$-1 < x < 1$  で収束するだろう。もし、 $x=1$  とすると、

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = \log 2$$

この級数は、たしかMercatorメルカトル級数だ。

$x = -1$  とし、交代級数の中で奇数の分数の符号を交互に変えて足していくと、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

有名なライプニッツの公式になる。

さて、元にもどって、最初の級数を有限の範囲で、プログラミングで値を求めてみよう。

$$\sum_{n=1}^{n=k} \frac{x^n}{n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^k}{k}$$

# Print the series:

```
# x + x**2 + x**3 + . . . + x**n
#   ---  ---  ---
#   2   3   n
```

```
>>> from sympy import Symbol, pprint, init_printing
>>> def print_series(n):
...     init_printing(order='rev-lex')
...     x = Symbol('x')
...     series = x
...     for i in range(2, n+1):
...         series = series + (x**i)/i
...     pprint(series)
...
>>> if __name__ == '__main__':
...     n = input('Enter the number of terms you want in the series: ')
...     print_series(int(n))
...
```

計算結果 1 :

Enter the number of terms you want in the series: 4

```
      2      3      4      5
      x      x      x      x
x + --- + --- + --- + ---
      2      3      4      5
```

次に、級数の値を求める

```
>>> from sympy import Symbol, pprint, init_printing
>>> def print_series(n, X_value):
...     init_printing(order='rev-lex')
...     x = Symbol('x')
...     series = x
...     for i in range(2, n+1):
...         series = series + (x**i)/i
...     pprint(series)
...     series_value = series.subs({x:X_value})
...     print('Value of series at {0}: {1}'.format(x_value, series_value))
...
>>> if __name__ == '__main__':
...     n = input('Enter the number of terms you want in the series: ')
...     x_value = input('Enter the value of x at which you want to evaluate the series: ')
...     print_series(int(n), float(x_value))
```

計算結果 2 :

```
Enter the number of terms you want in the series: 5
Enter the value of x at which you want to evaluate the series: 1.2
```

```
      2      3      4      5
      x      x      x      x
x +  $\frac{x^2}{2}$  +  $\frac{x^3}{3}$  +  $\frac{x^4}{4}$  +  $\frac{x^5}{5}$ 
Value of series at 1.2: 3.512064000000000
>>>
```

脚注

級数がseriesで、数列がsequence

reference

Python から始める数学入門P105 ~P109