A wonder of the number

The number of worlds that can not be seen but there.

As I often get pointed out that "You haven't written math blogs recently." So let's talk about numbers. Some people seem to think that the story of aviation and wireless practical science are fishy and boring.

First of all, look next series,

"1 + 2 + 3 + 4 + 5 +⋯+ n + ⋯" = –1/12 (0)

Euler suggested this formula in 1749. This formula is a very mysterious expression. Why does not the sum of natural numbers diverge to infinity?

① Normal natural number sum 1 + 2 + 3 + 4 + ... diverges to infinity

② Define a new natural number sum "1 + 2 + 3 + 4 + ... + n" that decay very slowly

③ In the finite term, it coincides with the normal natural number sum 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n

④ In the infinite term, it converges to -1/12

It is meaningful to quote the left side with quotation marks. Such an expression is called a functional equation. When searching on the net, this formula came to be seen. It seems that the Zeta function became known quite commonly a little. It can also be applied to cosmology, superstring theory and others. The ζ Zeta world will also be discussed in detail later.

On the other hand, how about this series?

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^n + ... = - 1$ (1)

This is also a mysterious series.
However, there is no mystery in the computer scientist.
In binary, when all bits are on, the result is $FFFFFFFF_H$ = -1 .

(By the way, this manuscript is written in Pages though, it became possible to write exponentiation and suffix. Before, I used to write exponentiation as 2^n using ^, now 2^n is better than the caret symbol.)

1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 +... = 2 (2)

Let's derive this series.
The sum of geometric series had the following formula.
$1 + r + r^2 + ... + r^n = (1 - r^{n+1}) / (1 - r)$
Substituting r = 1/2 yields = 2^(n + 1) - $1/2^n$

In other words,
$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/2^n = 2 - 1/2^n$
n -> ∞, the above equation converges to 2.
Infinite sum is decided by finite sum and perspective of numbers

Well, now I'm talking about *p*-adic number.

p-adic number r is described as

$r= \cdots + a_m \times p_m + \cdots + a_1 \times p + a_0 + a_{-1}/p + a_{-2}/p^2 + \cdots a_{-n} / p^{n.}$ (3)
Here, ..., a_m, ..., a_0, a_{-1}, ..., a_{-n} are any one of 0, 1, 2, ..., *p*-1. In this case,
r = (..., a_m, ..., a_0, a_{-1}, ..., a_{-n}) *p*-adic, it is called *p*-adic number as using notation of *p*

p is the prime number, that is, the prime number such as 2, 3, 5, 7.. It is a new number world based on prime numbers. Similar words include binary, octal, and hexadecimal.
They are alike in appearance but quite different in nature.

The *p*-adic numbers for any prime number *p* extends the ordinary arithmetic of the rational numbers Q in a different way from the extension of the rational number system to the real and complex number systems.

$\mathscr{R}$ Real number ⊃ $\mathscr{Q}$ rational number ⊂ $\mathscr{P}$ *P*-adic number

The extension is achieved by an alternative interpretation of the concept of "closeness" or absolute value. In particular, *p*-adic numbers are considered to be close when their difference is divisible by a high power of p: the higher the power, the closer they are. This property enables *p*-adic numbers to encode congruence information in a way that turns out to have powerful applications in number theory. Completion by the distance defined by the *p*-adic order of rational number field Q is expressed as Q_p, and its element is called *p*-adic number. More formally, for a given prime p, the field Q_p of *p*-adic numbers is a completion of the rational numbers. The field Q_p is also given a topology derived from a metric, which is itself derived from the *p*-adic order or *p*-adic value, an alternative valuation on the rational numbers. This metric space is complete in the sense that every Cauchy sequence converges to a point in Q_p. This is what allows the development of calculus on Q_p, and it is the interaction of this analytic and algebraic structure that gives the *p*-adic number systems their power and utility.
The *p* in "*p*-adic" is a variable and may be replaced with a prime (yielding, for instance, "the 2-adic numbers") or another placeholder variable (for expressions such as "the ℓ-adic numbers"). The "adic" of "*p*-adic" comes from the ending found in words such as dyadic or triadic.

This section is an informal introduction to *p*-adic numbers, using examples from the ring of 10-adic (decadic) numbers. Although for *p*-adic numbers p should be a prime, base 10 was chosen to highlight the analogy with decimals. The decadic numbers are generally not used in mathematics: since 10 is not prime or prime power, the decadics are not a field. More formal constructions and properties are given below.

$\sqrt{2} = 1.41421356237309521 92....$

In the standard decimal representation, almost all real numbers do not have a terminating decimal representation. For example, following rational numbers are represented as a non-terminating decimal.

1 = 0.9999999999....., 1/3 = 0.33333333....., 1/7 = 0.142857142857142857.......

There is a ridiculous explanation that "a number denoted as non-terminating decimal is an irrational number", but it is a mistake. Informally, non-terminating decimals are easily understood, because it is clear that a real number can be approximated to any required degree of precision by a terminating decimal. If two decimal expansions differ only after the 10th decimal place, they are quite close to one another; and if they differ only after the 20th decimal place, they are even closer.

10-adic numbers use a similar non-terminating expansion, but with a different concept of "closeness". Whereas two decimal expansions are close to one another if their difference is a large negative power of 10, two 10-adic expansions are close if their difference is a large positive power of 10. Thus 4739 and 5739, which differ by 10^3, are close in the 10-adic world, and 72694473 and 82694473 are even closer, differing by 10^7

Define the *p*-adic number mimicking the real number definition by the Cauchy sequence. "The p-adic number is determined by the *p*-adic Cauchy sequence of the rational number. However, the *p*-adic Cauchy sequence of equivalent rational numbers shall define the same *p*-adic number."

Here, the equivalence between rational Cauchy sequences of rational numbers is defined in the same way as the equivalence between Cauchy columns (absolute value is replaced by *p*-adic order or *p*-adic value).

It can also be said that "a group of p-arithmetic Cauchy sequence of mutually equivalent rational numbers is collectively referred to as one *p*-adic number." When introducing that real numbers can be defined as being determined by the Cauchy sequence of rational numbers, we did not explain how the four arithmetic operations of real numbers are defined under that definition. This means that the Cauchy $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$, determines the sum of the real numbers specified by Cauchy columns a_1, a_2, a_3, ... and the real numbers determined by Cauchy columns b_1, b_2, b_3, Define it as a real number and define the product as a real number defined by Cauchy columns a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ... (Division is calculated as the inverse of the calculation, the division is determined as the inverse of the multiplication.)

The sum and product of *p*-adic numbers are defined in the same way by replacing the Cauchy sequence with the *p*-adic Cauchy sequence. Then, the subtraction calculation is defined as the inverse calculation of the multiplication multiplication, and the whole p-degree number becomes the body like real numbers. This field is called a *p*-adic number field and is written as Q_p.

The absolute value, distance and convergence of the normal meaning of the rational number are naturally extended to the absolute value, distance, and convergence of the real number, but the *p*-adic order or *p*-adic value, the *p*-adic distance and the *p*-adic convergence of the rational number are also p Advance value, *p*-adic distance, *p*-adic convergence can be naturally extended. The *p*-adic Cauchy sequence of the rational number converges to the *p*-adic to the determined *p*-adic number.

Absolute value, distance and convergence of normal meaning of rational number are naturally extended to absolute value, distance and convergence of real number, but *p*-adic absolute value, *p*-adic distance, *p*-adic convergence of rational number. p It can be naturally extended to a progressive absolute value, a *p*-adic distance, and a *p*-adic convergence. The *p*-adic Cauchy sequence of the rational number converges to the *p*-adic to the determined *p*-adic number.

Hasse's principle

A collection of equations satisfies the Hasse principle if, whenever one of the equations has solutions in R and all the Q_p , then the equations have solutions in the rationals. Examples include the set of equations

$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$

with a, b, and c integers, and the set of equations

$x^2 + y^2 = a$ for a rational.

The trivial solution x = y = 0 is usually not taken into account when deciding if a collection of homogeneous equations satisfies the Hasse principle. The Hasse principle is sometimes called the local-global principle.

Also, we describe the theorem in another form;
Let $f(x_1 , . . . , x_n)$ be a polynomial of a rational number coefficient for $x_1 , . . . , x_n$.
The existence of rational numbers $x_1 , . . . , x_n$ that satisfy $f(x_1 , . . . , x_n) = 0$ --- (4) means that there are real numbers $x_1 , . . . , x_n$ that satisfy (4), and each prime *p* It is the same as existence of the *p*-adic numbers $x_1 , . . . , x_n$ that satisfy (4).

Helmut Hasse's local–global principle, also known as the Hasse principle, is the idea that one can find an integer solution to an equation by using the Chinese remainder theorem to piece together solutions modulo powers of each different prime number. This is handled by examining the equation in the completions of the rational numbers: the real numbers and the *p*-adic numbers. A more formal version of the Hasse principle states that certain types of equations have a rational solution if and only if they have a solution in the real numbers and in the *p*-adic numbers for each prime *p*.

So far, it may have been a bit difficult to explain the field extension from rational number to *p*-adic number. Talking figuratively, the number of worlds we have dealt with has been a field extension R / Q to rational number -> real number. Likewise, there are *p*-adic numbers in the direction of expansion P / Q that is opposite to this direction. Although stars are not visible in the daytime, they certainly exist. So the quotations of Misuzu Kaneko's poems and Saint-Exupéry's Little Prince phrases are cited. *p* of *p*-adic is a prime number, and if *p* = 5, we place 0, 1, 2, 3, 4 in order on 5 petals. Then 5 is on the same petal as 0. Therefore it is said that it is close to 0 and 5. The perspective is a number completely different from the real number on the number straight line. If one petal is compared to the universe, the next petal can be said to be a parallel universe. It may be possible to recall such a cosmic view.

Appendix
The greatest conceptual problem of cosmology is called measurement problem.
It is related to the assignment of probabilities in an independent causal- cutting region, separately, exponentially in the expanding universe. I hope that *p*-adic numbers will be useful, similar to a tree graph where such universe grows indefinitely. We are in three dimensional space but in terms of time it is a 4 dimensional space. In 4 dimensions it is cumbersome to treat *p*-adic numbers. If we can feel the circle in time, we need another surplus one dimension there. If we consider our world to be a 5-dimensional space we can think of reversibility in time.

数の不思議

もう一つの数の世界、見えないけれどそこにある数の世界

「このところ、数学ブログが少ないね。」というご指摘が多くなってきたので、「数の話し」をしよう。どうも、航空宇宙や無線は生臭くてつまらんと思う人もいるようだ。先ずは、次の級数を示す。

"1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ··· + n + ···" = −1 /12 　　(0)

オイラーは1749年にこの式を示唆した。
この式は、とても不思議な式だ。なぜ自然数の総和が無限大に発散しないのはなぜか？
①通常の自然数和 1+2+3+4+…は無限大に発散する
②非常にゆっくり減衰振動する新しい自然数和 ”1+2+3+4+…+*n*” を定義する
③有限項では、通常の自然数和 1+2+3+4+…+*n* と一致する
④無限項では、 -1/12 に収束する。

左辺を引用符で括ったのには意味がある。このような式を関数等式という。
ネットで検索すると、この式が見られるようになってきた。少しはゼータ関数がかなり一般に知られるようになったらしい。宇宙論、超弦理論などにも応用が見られる。ゼータの世界は、また、あとで詳しく議論する。

一方、こちらの級数は、どうだろう。

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n + \cdots = -1$ 　　(1)

これも、不思議な級数だ。ところが、コンピュータサイエンティストには、不思議でもなんでもない。2進法では、全てのビットがオンになると、結果は FFFFFFFF すなわち -1 だ。

(ちなみに本原稿はPagesで書いているが、べき乗とかサフィックスが書けるようになったのは式を書くのに便利だ。特に、べき乗に^ カレット記号を使っていたが、読みやすさは2^nよりもも2^nのほうがよい。)

さらに、2のべき乗の逆数の総和は、2になる。

1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + . . . = 2 　　(2)

この級数を導出してみよう。等比級数の和には次の公式があった。
$1+r+r^2 +\cdots+r^n = (1-r^{n+1})/(1-r)$

r = 1/2を代入すると　=　2^{n+1} - $1/2^n$
つまり、

$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + . . . 1/2^n = 2 - 1/2^n$

$n \to \infty$、上式は2に収束する。

さて、今日は、*p*-進数について話す。*p*-進数rは、次のように記述される。

$$r= \cdots + a_m \times p_m + \cdots + a_1 \times p + a_0 + a_{-1}/p + a_{-2}/p^2 + \cdots a_{-n} /p^{n}. \qquad (3)$$

ここで $\cdots ,a_m,\cdots ,a_0, a_{-1},\cdots ,a_{-n}$ は $0,1,2,\cdots ,p-1$ のいずれかである。このとき、
$r = (\cdots a_m \cdots a_1 a_0.a_{-1} \cdots a_{-n})_{p\text{-進}}$ と書いて、これを r の *p*進法による表記という。

*p*とは、プライムナンバー、つまり2, 3, 5, 7. . .などの素数である。素数をベースにした、新しい数の世界である。似た表現に、2進法、8進法、16進法などある。これらは、実は、似て非なるものである。

任意の素数*p*に対する*p*進数体は、有理数体から実数体への体の拡張と異なり、有理数の通常の算術ろ異なる方法で体を拡張する。

$\mathcal{R}$ 実数 ⊃ $\mathcal{Q}$ 有理数 ⊂ $\mathcal{P}$ *p*進数

この拡張は、「近さ」または絶対値という概念の別の解釈によって達成される。特に、*p*-進数は、それらの差がpの高倍率で割り切れるときに近いとみなされる。すなわち、高倍率であれば近づく。この性質は、*p*-進数が、数論において強力な応用を有する。有理数体Qの p-進付値が定める距離d_pによる完備化を Q_p と表し、その元を *p* 進数と呼ぶ。与えられた素数pに対して、*p*進数の体Q_pは有理数の完成である。体Q_pには、メトリック、すなわち距離から導出されたトポロジも与えられる。メトリックは、*p*-進付値から導出される。これは、有理数の代わりの評価である。このメトリック空間(距離空間)は、すべてのコーシー列がQ_pのある点に収束するという意味で完備だ。これがQ_pの微積分の発展を可能にするものであり、*p*-進数システムにその力と効用を与えるのはこの解析的代数構造の相互作用である。

"*p*-adic"の*p*は変数でプライム（ "2-adic numbers"など）や別のプレースホルダ変数（ "ℓ-adic numbers"などの式）で置き換えることができる。 "*p*-adic"の "adic"は、ダイアディックやトライアドなどの言葉で見つかった終わりから来ているという。

$\sqrt{2} = 1.4142135623730952192....$

標準の小数表現では、ほとんどすべての実数は有限の小数で表現できない。例えば次の有理数は10進数の無限小数で表される。

1 = 0.999999999999.....,　1/3 = 0.33333333.....,　1/7 = 0.142857142857142857.......

無限小数で表される数は無理数であるというような、いい加減な説明があるが、間違いだ。有限の小数点によって必要な精度に実数を近似できることは明らかであるため、無限小数の小数点は容易に理解できる。 10進小数点以下2桁の展開が小数点第10位の後でのみ異なる場合、それらは互いに非常に接近している。小数点第20位以降の差があれば、さらに近づいていく。

10進数は、同様の無限小数展開を使用するが、近さとは異なる概念を使用する。両者の差が10の大きな負の累乗である場合、2つの小数の展開が互いに近似しているのに対して、その差が10の大きな正の累乗である場合、2つの10進の展開は近い。したがって、10^3 異なる4739と5739は近い。10進数の世界では72694473と82694473がさらに近く、10^7異なっている。

コーシー列による実数の定義をまねて、*p*-進数を定義すると、「*p*-進数とは、有理数の*p*進コーシー列によって定まるものである。ただし、同値な有理数の*p*進コーシー列は、同じ*p*進数を定めるものとする。」ここで、有理数の*p*進コーシー列の間の同値はコーシー列の間の同値と同様に (絶対値を*p*進付値に置き換えて) 定義する。「互いに同値な有理数の*p*進コーシー列をひとまとめにしたものを、一つのp進数と呼ぶ」ということができる。

実数を有理数のコーシー列によって定まるものと定義できるということを紹介したとき、その定義のもとでは実数の四則演算はどう定義されるのかの説明はしていない。これは,コーシー列a_1, a_2 , a_3, . . .が定める実数と、コーシー列b_1, b_2, b_3, が定める実数の和は、コーシー列a_1+b_1, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$, が定める実数と定義し、積は、コーシー列a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ...が定める実数と定義する。(ひき算はたし算の逆算、わり算はかけ算の逆算として定まる。) *p*進数の和や積も、コーシー列を *p*進コーシー列に置き換えて同様に定義する。すると、ひき算わり算がたし算かけ算の逆算として定義され、*p*進数全体は実数体同様、体になる。
この体を*p*-進数体といい、Q_pと書く。有理数のふつうの意味の絶対値、距離、収束は、実数の絶対値、距離、収束に自然に延長されるが、有理数の*p*進絶対値、*p*進距離、*p*進収束も、*p*進数の*p*進付値、*p*進距離、*p*進収束に自然に延長できる。有理数のp進コーシー列は、それが定め*p*進数へ、*p*進収束していく。

ハッセースの定理
方程式の集合は、方程式の1つがRとすべてのQ_pで解を持つときはいつでも、方程式は解答の中に解を持つならHasseの定理を満たす。例には、一連の方程式
ax2 + bxy + cy2 = 0

a、b、およびcの整数、および方程式のセット
x2 + y2 = aである。

自明な方程式の集合がHasseの定理を満たすかどうかを決定する際には、通常、x = y = 0という簡単な解は考慮されない。 ハッセの定理は局所大域原理と呼ばれ、中国剰余定理を使って、それぞれの異なる素数のmodのべき乗をまとめて、方程式の整数解を見つけることができるという考え方だ。これは、有理数の数式の実数とp進数を調べることによって処理される。 局所大域原理のより正式なバージョンでは、特定のタイプの方程式が、実数と各素数pの解法を持つ場合に限り、合理的な解を持つことが示されている。

最後にまとめると; 有理数からp進数への体の拡大の説明が少し難しかったかもしれない。比喩的に話しすると、我々が扱ってきた数の世界は、有理数->実数への体の拡大 R/Q してきた。同様に、この方向とは反対の数の拡大する方向P/Qにp進数があるという。星は昼間に見えないけれど、確かに存在している。それで、金子みすゞの詩やサン＝テグジュペリの星の王子さまの句がよく引用されている。p進数のpとは素数であり、p=5とすると、5枚の花びらの上に、順に、0, 1, 2, 3, 4と置いていく。すると5と0は同じ花びらの上にある。それゆえ、0と5の間は近いという。遠近感が数直線上の実数と全く違う数である。一つの花びらを宇宙に例えると、となりの花びらは並行宇宙といってもよい。そんな宇宙観を想起することができるかもしれない。

参考
宇宙論の最大の概念的問題は測定の問題と呼ばれている。 それは独立した因果から遮断された領域にばらばらに、指数関数的な膨張宇宙における確率の 割り当てに関係している。 そのような宇宙が無限に成長するツリーグラフに似てp-進数が役立つことを期待している。 我々は3次元空間にいるが時間を考慮すれば4次元空間である。4次元ではp-進数的に扱いにく い。
時間に輪廻が感じられるとすると、そこにもう一つの余剰1次元が必要だ。 我々の世界を5次元空間であるとすると時間に可逆性を考えてもよい。