木を見て森を 見る2

曲率、局所から大域へ

S. Kusafusa

❽

Nitpicking is not science

重箱の隅をつついても、全体はわからない

エラトステネスは、
アレクサンドリアとシエネ間の距離と緯度の差から、
地球の全周を計算した

ガウスの曲率

(マイヤーの定理 1941年)
どんな次元でも、リッチ曲率が1以上なら、
2点間の距離は π 以下になる

リーマン・ロッホの定理

コンパクトなリーマン面上の複素解析と曲面の種数とを結びつける定理。
特定の位数の零点と極をもつ有理型関数空間の次元計算に役立つ。

リーマン面とは1次元複素多様体

開集合
連結
単射

地図帳　地球儀　地図帳　縮尺の地図
等角性

位相空間

ガウスの曲率

代数構造、体

リーマン・ロッホの定理

C 上のベクトル空間 L(D) の次元　l (D)、種数 g のコンパクトなリーマン面X 、標準因子K、l (K – D) は補正項とすると、任意の因子 D ∈ Div (X) に対し、

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g$$

次元 – 補正 = 次数 + 1 – g

補正項 l (K – D) は非負であるから、

$l(D) \geq \deg(D) + 1 - g$ となる。(リーマンの不等式と呼ぶ)

定理中のロッホの部分は、不等式の両辺の間のありうる差異の記述の部分である。
種数 g のリーマン面の標準因子 K は次数 2g – 2 であり、因子を定める有理型1形式の取り方には依存しない。
D の次数が 2g – 1 以上のとき補正項は 0 となるので、

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g$$

局所から大域へ

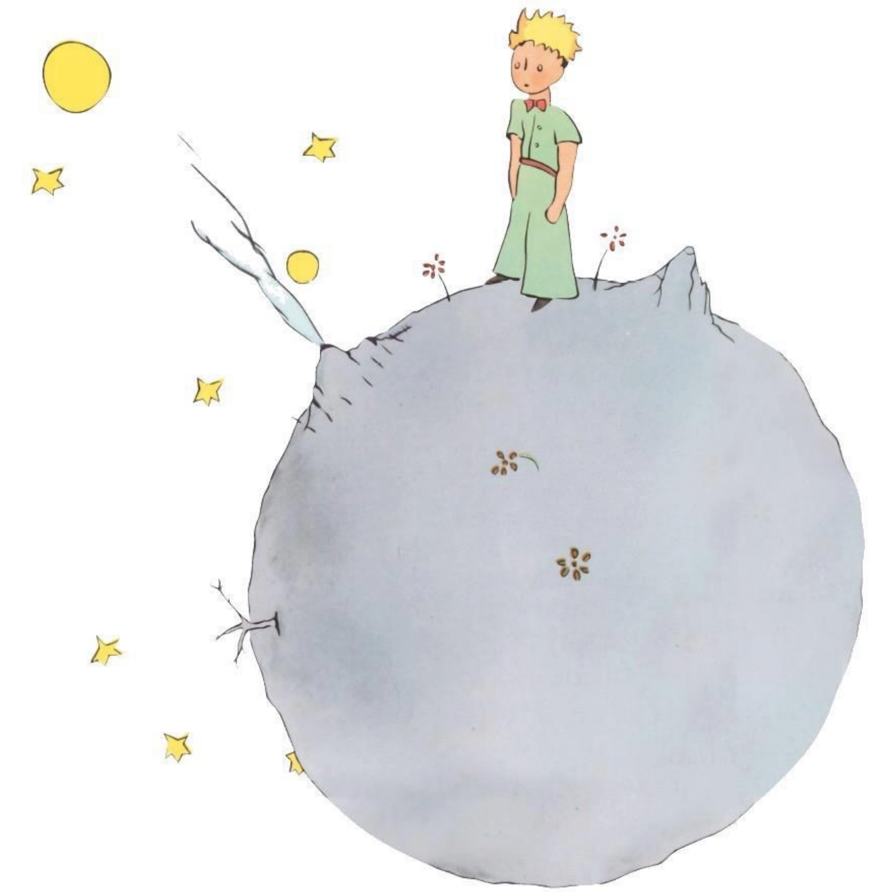
曲率が正 → 局所が凸または凹

曲率が負 → 局所が鞍部のような形

曲率が一定なら、局所から大域が見えるだろうか

リーマン幾何とローレンツ幾何を考える

ユークリッド空間



$X^2 + y^2 <= r^2$

ミンコフスキー空間

$| X^2 - y^2 | <= r^2$

擬リーマン幾何

定理1

定理1-1　リーマン幾何は、必ず閉じている

定理1-1　ローレンツ幾何は、決して閉じていない

この背景には、初等的な原理

・周期を表す代数構造

・タイル張り

この、どちらかがあれば、大域の構造が見える

定理2

負の曲率のとき

定理2-1　リーマン幾何は、どの次元でも存在する

定理2-2　ローレンツ幾何は、奇数次元のとき存在する

定理3

3次元の閉じた反閉ド・ジッター多様体では、
ラプラシアンの固有値で不動なものが無限個
存在する

この定理は、
周期(大域的な量)が変われば全ての固有値が
動くという常識が成り立たないという現象を
捉えている

現時点では、宇宙はフラット(曲率0)のようだ
宇宙は閉じてるとも開いているともいえない