水ロケットの性能計算書

2017. 4.21

必要加圧と到達高度と飛行距離の概算に利用できます

表1 加圧と到達高度・到達距離の関係

加圧	kPa	203	304	405	507	608	708
噴出速度	U1 (m/s)	14.2	20	24.5	28.3	31.6	34.6
推力 N	F (N)	6	12	18	24	30	36
推力重量比	F/W	2.2	4.3	6.6	9.8	10.9	13.1
鉛直到達高度	Y(m)	10.3	20.4	30.6	40.9	50.9	61.1
飛行時間	*t* (sec)	2.9	4.1	5	5.8	6.4	7.1
45°到達高度	Y (m)	5.1	10.2	15.3	20.4	25.3	30.5
到達距離	X(m)	20.6	40.1	61.3	81.7	101.9	122.2
飛行時間	*t* (s)	2.1	2.9	3.5	4.1	4.6	5

自重	65g
離陸重量	280g
ゼロ燃料	80g
搭載燃料	200g (ペイロード)
平均重量	100g
ノズル径	6φ

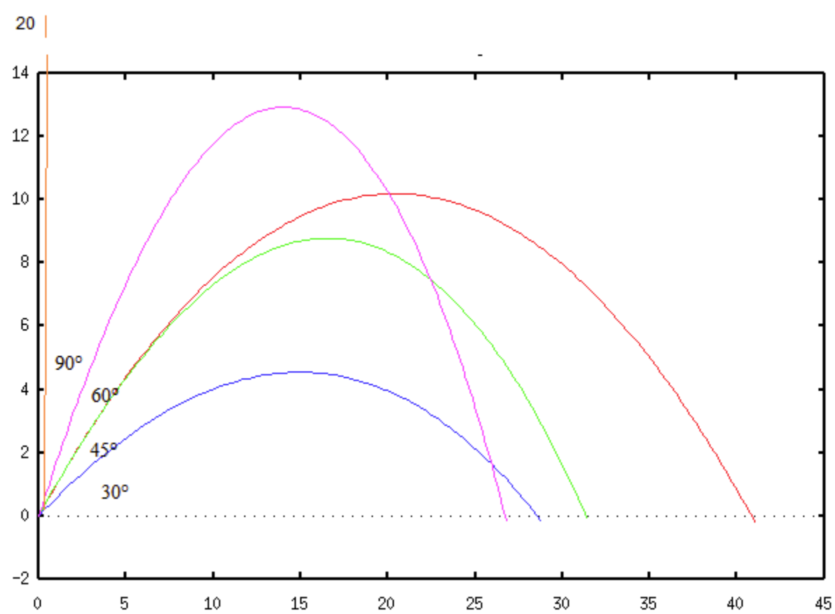


図 1 水ロケット軌跡のシミュレーション

水ロケットの推力と飛行性能

1 使用する記号

g : 重力加速度 9.807 m/s^2

t : 時間 sec

ρ: 水の密度 1000 kg/m^3

W*0*:自重、燃料(水)なしの重量 kg

W: 離陸重量 kg

Wm:平均重量 kg

c : 燃料(水)の容量 kg

r : ノズル半径 m

S : ノズル面積 m^2

P: 加圧 kPa

F: 推力 N (kg m/s^2)

Ns：総推力(Kg m/s)

F/W: 推力重力比 (無次元数)

Qn: 運動量

U1: ボトル内流速 0 m/s

U2: ノズル流速 m/s

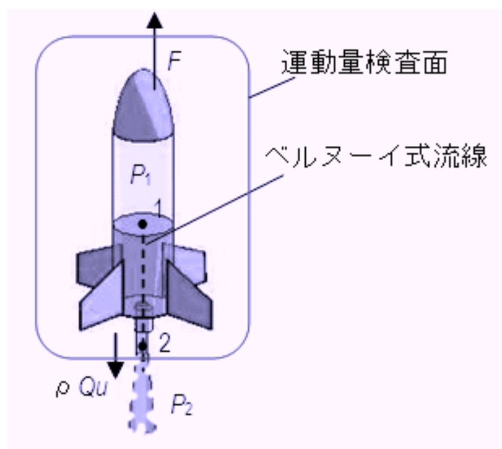
V0 : 離陸速度 m/s

Vy: 鉛直慣性速度 m/s

Y0y: 燃焼距離 m

Y: 鉛直距離 m

X: 水平距離 m



水ロケットの基本関係式

$$F = \rho Q_1 U_1 - \rho Q_2 U_2 = - \rho S_1 U_1 - \rho S_2 U_2$$
$$P_1/\rho = P_2/\rho + 1/2\ U_2\hat{}2$$

2. 推力の計算

S ペットボトルの口の面積 0.00003 m^2 、

P_1 ペットボトル内の圧力 304kPa (3気圧) 44.088psi で計算する

ベルヌーイの関係式から $P_1/\rho = P_2/\rho + 1/2\ U_2$^2

$U_2 = \sqrt{}(2 (P_1 - P_2) / \rho) = \sqrt{}(2 (303\text{-}101) \times 10^3 / 1000) = 20$ m/s - - - - ①

$F = \rho Q_1 U_1 - \rho Q_2 U_2 = - \rho S_1 U_1 - \rho S_2 U_2$ 、$U_1 = 0$ だから第1項はゼロ

$F = - \rho Q_2 U_2 = - 1000 \times 0.00003 \times 20^2 = - 12$N (kg m / s^2) - - - - - ②

燃焼(水噴出)時間(t)は、燃料(水)の容量 / (ノズル面積 x 噴出速度)

$= c / (s \times U_2) = 0.0002$ m^3 / (0.00003 m^2 x 20 m/s) = 0.33 sec - - - ③

総推力Nsは、12N x 0.33sec = 3.96 kg m /s - - - - - - - - - - - - - - - ④

少し小さなノズルを使用した場合

r = 2.5mmのとき、S = 0.00002 m^2

P_1 = 201 kPa(2気圧) 29.154 psi

$U_2 = 2 (201\text{-}101) \times 10^3$ x/ 1000 = 14.2 m/s - - - - - ①'

F = - 1000 x 0.00002 x 14.2^2 = 4 N - - - - - - - - - - - ②'

W_m平均重量 = W – W0 = 280 -80 / 2 = 100g = 0.1 kg - - - - - - - - - ⑤

到達距離 の概算式は、平均推力(kg m /s^2) x 燃焼時間 (s) / 平均重量 (kg)

= 12 x 0.33 / 0.1 = 39.6m - ⑥

3. 推力重力比

F/W = kN / (kg x 9.807 m/s^2)
= 12 (kg m /s^2)/ {0.28(kg) x 9.807 (m/s^2)} = 4.3 - - - - - - - - - - - - - ⑦

推力重力比が > 1なので、鉛直打ち上げが可能

4. 飛行時間と到達距離

鉛直慣性速度V_yは、$V_y = V_{0y} – gt$

鉛直到達高度Yは、燃焼高度Y_{0y}+ 慣性獲得高度

$Y = V_{0y}\, t - 1/2\, g\, t^2$ - ⑧

最高到達地点までの飛行時間は、

$V_y = V_0 - gt = 0$ と $V_0 = 20$ m/s から、飛行時間はt = - 2.04 sec - - - ⑨

$V^2 - V_0^2 = 2gY$ (tを含まない式)より、到達高度は$Y = 20.48$ m - - - ⑩

到達距離 の概算式⑥を再掲する

平均推力(kg m /s^2) x 燃焼時間 (s) / 平均重量 (kg)

= 12 x 0.33 / 0.1 = 39.6m (誤差は1.1%程度)

最長水平距離を得るには図1のように、発射角度45度で打ち出す。

到達点と到達距離を計算するまでもなく、表1と図1から外挿または内挿することで目安の高度・距離が得られる。

※ 注意 ペットボトル加圧限度は業界基準によると、1471kPa (15kg/cm^2)

これほど加圧できる手動空気入れは身近にない。

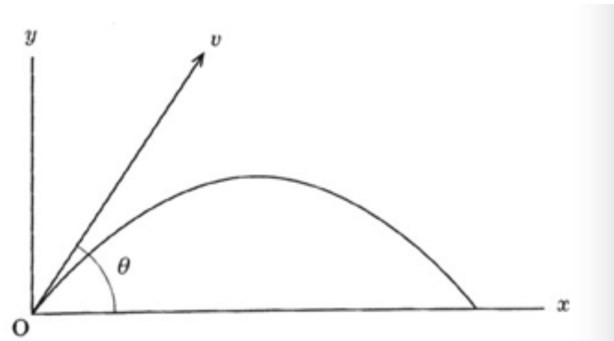
また、水ロケットを楽しむには、200〜300 kPaで十分である。

圧力計表示の換算表

kPa	100	200	300	400	500	600	700	1471
psi	14.5	29.0	43.5	58.0	72.5	87	101.5	213.5
Kg/cm^2	1.02	2.0	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	15

プログラミング演習

最大飛行到達距離を、微分方程式を使わずに解く



t時間後のx,y 方向の変位は、

$x = v\,t\cos\theta$
$y = v\,t\sin\theta - 1/2\,g\,t^2$

着地時、y = 0 だから、

$v\,t\sin\theta - 1/2\,g\,t^2 = t\,(v\sin\theta - 1/2\,g\,t) = 0$
よって、$t = 2\,v\sin\theta / g$

このときの飛行到達距離dは、倍角定理より

$d = v\,t\cos\theta = v\cos\theta(2v\sin\theta / g) = (v^2/g)\sin 2\theta$
この関数の最大値は、$\theta = \pi/4$ のとき $d = v^2/g$

よって45°で発射すると最大が得られる。

```
/* 最大飛行到達距離を、微分方程式を使わず解く */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define g 9.8 /* m/s^2 */
#define PI 3.141592653589793
int main(void)
{
   int V0;       /* V0 : 初速(m/s) */
   int a;        /* angle : 角度(θ) */
   double t;     /* 対空時間 */
   double D;     /* 飛行到達距離 */
```

```
   printf("水ロケットの最大飛行到達距離を、微分方程式を使わず解く \n");
   printf("初速 V0(m/s), 角度θ(度)で水ロケットを発射するものとする\n");
   scanf("%d",&V0);
   printf("\n初速度(m/s) = %d", V0);
   scanf("%d",&a);
   printf("\n発射角度 = %d", a);
   double rad = a * PI / 180.0;  /* 角度をラジアンに変換 */
/* 飛行時間   t 2 V0 sin θ /g */
   t = 2*V0* sin(rad)/g;
   printf("\n飛行時間  = %.2f",t);
/* t時間後のx, y方向の変位は、x = Vt cos θ,  y = Vt sin θ - 1/2 g t*2  */
      D = (V0*V0/g)*sin(2*rad);
      printf("\n到達距離 = %.2f",D);
return 0;
}
```

計算結果:

水ロケットの最大飛行到達距離を、微分方程式を使わず解く

初速 V0(m/s), 角度θ(度)で水ロケットを発射するものとする

初速度(m/s) = 20

発射角度 = 45

飛行時間 = 2.89

到達距離 = 40.82

Python で計算し、グラフ化する

水ロケットの航跡

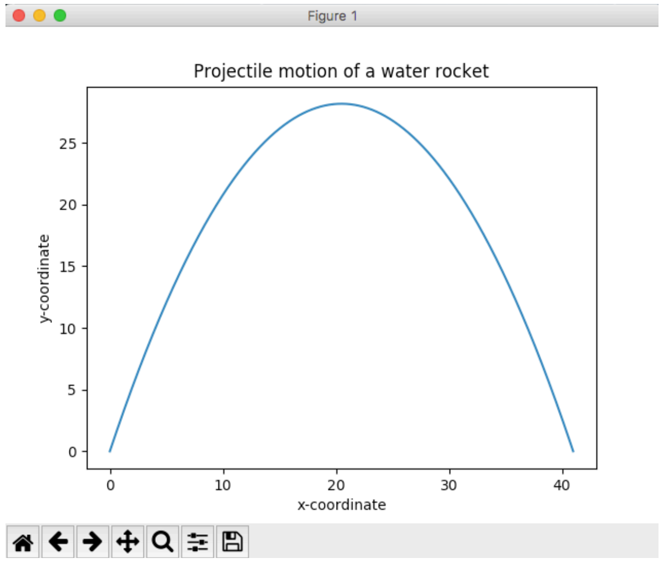
```
import sys
import math
from matplotlib import pyplot as plt
def draw_graph(x, y):
    plt.plot(x, y)
    plt.xlabel('x-coordinate')
    plt.ylabel('y-coordinate')
    plt.title('Projectile motion of a water rocket')

def frange(start, final, interval):
    numbers = []
    while start < final:
        numbers.append(start)
        start = start + interval
    return numbers

def draw_trajectory(u, theta):
    theta = math.radians(theta)
    g = 9.8
    # Time of flight
    t_flight = 2*u*math.sin(theta)/g
    #find time interval
    intervals = frange(0, t_flight, 0.001)
    # list of x and y coordinates
    x = []
    y = []
    for t in intervals:
        x.append(u*math.cos(theta)*t)
        y.append(u*math.sin(theta)*t - 0.5*g*t*t)
    draw_graph(x, y)

if  __name__=="__main__":
    try:
        u =25.0         #  ‘the initial velocity m/s:’
        theta = 70.0    #  ‘the angle of projection (degree)’
    except ValueError:
        print ("error")
    else:
        draw_trajectory(u, theta)
        plt.show()
```

計算結果：




```
# 速度条件を3条件に変えてプロット

if __name__=="__main__":
    u_list = [20, 40, 60]
    theta = 45
    for u in u_list:
        draw_trajectory(u, theta)

    plt.legend([’20’, ’40’, ’60’])
    plt.show()
```

計算結果