有限単純群モンスター

モンスターとは、およそ8.08×10^53個，正確には2^46・3^20・5^9・7^6・11^2・13^3・17・19・23・29・31・41・47・59・71=
808017424794512875886459904961710757005754368000000000個の元からなる巨大な群である。ちなみにアボガドロ定数はおよそ6.02 ×10^23である。モンスターは豊かな構造をもつ興味深い研究対象である。

群は図形や空間の対称性を記述する数学的構造である。位数すなわち元の個数が有限であるものを有限群という。例えば、正三角形には120度回転すると元の位置に重なるという対称性がある。何もしない操作や裏返しも含め、位数6の群が得られる。この群は位数2の群を回転のなす位数3の群で拡大したものと解釈できる。一般に，有限群は有限単純群の拡大の繰り返しでできている。

有限単純群にはいくつかの無限系列と26個の例外があり、例外中で最大のものがモンスターである。1970年代前半に有限単純群の分類の試みの中でモンスターが発見された後、1970年代後半になってムーンシャインとよばれる不思議な現象が見出された。モジュラー関数の級数展開とモンスターの表現の指標に関係があるというのである。これを追及する中で、物理学の弦理論との関係も示唆され、1980年代前半にムーンシャイン加群とよばれる無限次元の代数系が構成された。これを用いてムーンシャインは解明され、関連する一連の研究はボーチャーズ（R. E. Borcherds）のフィールズ賞受賞につながる重要な研究となった。

筆者はこのようなつながりを研究する者の一人である。モンスターについては他にも興味深い観察や謎があり、それらがムーンシャイン加群によって明快に説明されるのが望ましい。最近では，ムーンシャインの枠組みがある種の幾何学と関係することも見出され、モンスターに関わる数学の世界はさらに広がりを見せつつある。

超弦理論とムーンシャイン現象

K3曲面は超弦理論のコンパクト化で基本的な役割を果たす事が知られているが、最近その位相的不変量である楕円種数を調べて面白い事に気がついた。K3曲面上の超弦理論は N=4 共形不変性を持つため楕円種数をN = 4 共形代数の指標で展開してその展開係数を調べると、これらがちょうどマシュー群M24と呼ばれる離散群の規約表現の次元の和に分解できる事が分かった。これはモジュラーJ関数のq展開の係数がモンスター群の規約表現の和に分解されるいわゆるMonsterous Moonshine と呼ばれる現象に良く似ている。このため我々の見つけた現象はMathieu moonshine と呼ばれるようになった。Monsterous moonshine は70年代後半に発見され10数年かけて数学者によって解決された。Mathieu moonshine の現象はその起源や意味がま

だ全く不明である。最近は拡張されて Umbral moonshine, Enriques moonshine なども見つかっている。

Monster group
For infinite groups with all nontrivial proper subgroups isomorphic, see Tarski monster group.
In the mathematical field of group theory, the monster group M or F1 (also known as the Fischer–Griess monster, or the Friendly Giant) is a group of finite order:

246 · 320 · 59 · 76 · 112 · 133 · 17 · 19 · 23 · 29 · 31 · 41 · 47 · 59 · 71
= 808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757,005,754,368,000,000,000
≈ 8 · 1053.