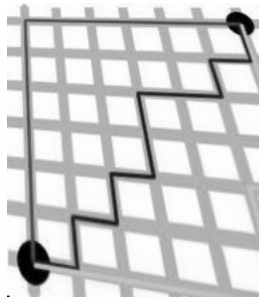


## 極限と無限

以前、京都の街をあるいたときの距離に関してパズルを書いた。ここで、碁盤の目状の道路を( $x_1, y_1$ )地点から( $x_2, y_2$ )地点までを走る距離は、後戻りしない限り、 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ だ。これをヘルマン・ミンコフスキーのマンハッタン距離という。

しかし、碁盤の目を限りなく細かく引いたらどうか？ 三角不等式の定理 2辺の和は他の1辺より短くなるのでは？ 答えは、ならない。でも、辺の長さが $a, b, c$ の直角三角形の対辺の長さは、 $c^2 = a^2 + b^2$ だし、見た目には三角形になっているんだから短いに違いない....。

ここで、「限りなく細かく」ということばがくせものだった。限りなくとか、極限とか、無限ということばの使い方には注意が必要だ。道路を限りなく細かく刻んでも、階段状である性質には変わりはない。その性質が変わらない限り、三角不等式が適用されることはない。



ある数が限りなく続くとか、限りなく大きくなるとか、限りなく0に近づくとか、限りなく一定の値に収束 convergence する、そんな場合にその数を用いた関数がどんな値に近づくかを考えることを関数の極限 limitという。

数学のことばでは、限りなく続く、限りなく近づく、とはいうが、無限に続く、無限に近づくとはいわない。無限にも大きさがあるからだ。限りなくを漢字にすれば無限には違いないが、無限は無限個あるというように名詞で使う。ある数  $n$  が限りなく大きくなる場合、 $n$  が無限大 infinity に近づくといい。インフィニティは、ファイナイト finite 有限の反語だ。

無限大は  $\infty$  という記号で表し、 $n \rightarrow \infty$  という形で表現する。また、負の側に無限に大きくなっていく場合、 $n$  はマイナス無限大に近づくといい、 $n \rightarrow -\infty$  で表し、無限小とはいわない。ただし、無理数 irrational number に対し、無限小数 infinity decimal ということばを使うことはある。

この n という記号は整数 integer を意味し、実数 real number を強調したい場合には x 等を用いて、 $x \rightarrow \infty$  と記す。矢印の記号はある数 a に限りなく近づくとき、x が a に限りなく近づくとき  $x \rightarrow a$  と記す。特に a が 0 への近づき方が正の側から近づくとき  $x \rightarrow +0$ 、負の側から近づくとき  $x \rightarrow -0$  と記す。もっとも、ゼロは数ではないと以前書いた。したがって、-0 はおかしい極限值だが、どちらの方向からの極限值かを区別するための記号として、この場合に許されよう。ちなみに、コンピュータの中では、0 という値に、+0, -0 が存在する。

極限を意味する数学記号 lim を使うとき、 $\rightarrow$  でなく  $=$  を使う。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} = 0$$

円周率  $\pi$  は、3.141592653589723846... と、無限小数(無理数、超越数)になる。ネイピア数 e も無理数である。

一方、1 を 3 で割り 3 をかけると、 $1/3 * 3 = 0.9999999999...$ 。ここで、9 が無限に続くとはいわないし、無限小数ともいわない。9 が循環 recurring decimal するという。もちろん、限りなく 1 に近づくのではなく、 $0.9999999999... = 1$ 、厳密に 1 である。

ちなみに、一般会話では、限りなくは次のようにいう。

**infinitely**, 限りなく(無限に)

**limitlessly**, 限りなく(際限なしに)

unlimitedly 限りなく

indefinitely 限りなく

immeasurably

boundlessly

eternally

一般の会話のなかでも、"限り"の程度を考えて、使い分けしていると思う。

そうであって願いたい。

## おまけ

$n \times r$  の碁盤の目状の道で対角線 A から B までに到着できるパスの数は、以下のとおり。

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$