

## 鶴の恩返しと狐の恩返し

類体論の加藤和也は鶴の恩返しを引き合いに出し、ゼータの棲家と実数世界そしてp-進世界の関わりを”素数の歌が聞こえる”というエッセイで詩的に描いた。

ゼータ関数の不思議さと有益性に対し、彼は心情的にゼータの棲家への入り口を愛媛県の七折の七折地藏菩薩としたのである。

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

これを变形して

$$4 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{7})(1 + \frac{1}{11})(1 - \frac{1}{13}) \dots$$

分子の $\pi$ は、(実数世界での円の長さ)・(2進整数の世界での円の長さ)・(3進整数の世界での円の長さ)・(5進整数の世界での円の長さ)・・・・となって、 $\pi$ を素数達が協力しあって生み出している様子を表している。

一方、分母の4は円  $x^2 + y^2 = 1$  上に整数点が4個あることを表している。

この式的不思議さはいくら見つめても飽きない。

つくばの地近くに、牛久に女化(おなばけ)という名の地がある。ここには狐の恩返しのが伝承されていて、私にも類似した感慨があったことを紹介したい。

女化の伝承は、漁師に討たれそうな狐を助けたところ美しい女性が現れ妻にめとり子供をなしたが、正体が見破られると歌を残して去ってしまったという定説通りの物語である。

素数に同じように取り憑かれている者にはゼータ関やオイラー関数の有益性には感慨深いものがある。

素数に取り憑かれた者にはゼータに関わることができたことが狐の恩返しに感じるのである。