数には素数という魔物

数には素数という魔物が棲んでる。この魔物に取り憑かれると二度と元には戻れない。素数は面白いが難しい。一般リーマン予想 (注2)もまだ解けていない。ここで、無限和は有限和と遠近感で決まるという話とp-進数世界の遠近感を少し紹介しよう。何のこっちゃといわれるかもしれないが、面白いとか不思議と思ってもらえれば幸いである。

遠近感とは対象間の大小関係のことだ。遠くて近きは男女の仲というが、これも遠近感だ。距離を数学ではノルムといって $|a - b|$ で定義できる空間をノルム空間という。距離がゴムのように自在に伸び縮みできる空間は位相空間と言って、男女の好き嫌いの気持ちは、どちらかというと位相空間的だ。

次の級数を考えてみよう。 $1 + 2+ 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n + \ldots = - 1$　この級数はより大きな数を足し込んでいくので、普通に考えれば無限大になるのだが、ここではマイナス1 (注1)になる。.これで正しい答えである。どうしてと聞かれてもそうなのだと答えるしかないのだが。無限大が-1と同じというと距離感が異なる世界見えてくるから不思議だ。もう少し遠近感を説明すると、そこに数の大小関係があることが前提になる。

実数には数直線で理解できる大小関係がある。この大小関係が遠近感をつくっている。例えば、$a < b < c$ は、aよりbの方がcに近い。また実数には符号もあり、大小関係も遠近感に関連している。 遠近感〜大小関係〜符号。しかしp-進数の世界にはこんな大小関係がない。複素数でも大小関係はない。2つの数の差がpの冪で割れるほど近いと考える。例えば1からの距離を82と2とで比べた場合、82よりも2のほうが1に近くなる3進数で考えると、$(82\text{-}1) = 81=3^4$であり、(2-1)=1=3の0乗で82-1のほうが3の大きな冪で割れるからだ。今はp=3の場合だったが、このpにいろいろな素数をとると遠近感のまったく違った世界が現れてきる。

また不思議なことに、p進数の世界では実数の世界で扱っていた数が存在しなかったり、逆に実数の世界に存在できなかった数がこちらの世界で存在できたりする。我々は無意識に10進数を使っているが、自然を理解するに10進数である必要なない。たまたま我々の指が10本あるからそうなっただけだ。

例えば$\sqrt{-2}$ は実数の世界にはあり得ない。複素数への拡張が必要だ。しかながら、3進数の世界では存在するから不思議だ。ちなみに、進数と進法は異なるので注意を喚起しておく。*p*-進数表示では、整数側に無限桁加えたもになる。

$-1 = (\ldots 111111)_{2\text{-進}}$、

$\sqrt{-2} = (\ldots 200211)_{3\text{-進}}$、　　$(\ldots 022012)_{3\text{-進}}$

表現方法が2通りあるのは実数の世界でも同じことだ。ちなみに実数の世界でも1は、(1= 1, 1 = 0.9999999…..）と２通りある。

さて、上記の√-2が正しいかどうかは、√-2 x √-2 ＋２＝０で検証できる。2通りの解は、正負の関係にあるので足すと0になることでも確かめられる。(…200211)3進数 + (…022012)3進数 = 0
双方の式を計算してみるとどちらも0になり、存在が証明できた。

では5進数、7進数ではどうなのか。
-2/3 = (…..313131.) 5-進
-2/15 = (…..31313.1) 5-進
-1 = (.....4444444) 5-進
-1 = (......6666666) 7-進

実数や有理数や少数は、10進数で表示できる。一方、すべての有理数は、p−進数で表示できるが、実数すべてが表現できるわけではない。実数 ⊃ 有理数 ⊂ p-進数という関係があって、有理数が双方の世界を仲介をしてくれているのだ。

「大きいことはいいことだ」という方もいるが、数学では必ずしもそうではないといっている。「過ぎたるは及ばざるがごとし」という訳である。こちらが真理に近い場合があると思え。

脚注

注1. エミル・ボレルによるアプローチ
Considering Borel regularization, the result is defined as -1.
An interesting approach to interpreting sums of these divergent series was suggested by Emile Borel in 1899. By definition the generalized Borel sum of an arbitrary series

$$\lim_{s\to 1}\int_0^\infty e^{-st}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n t^n}{n!}\right)dt=-1$$

http://imetrics.co.jp/opinion2/TowardsTheSky.pdf

注2. 一般リーマン予想 Riemann hypothesis :

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ ζ(*s*) の自明でない零点 *s* は、全て実部が、1/2 の直線上に存在するという仮説

http://imetrics.co.jp/math3/HassesPrinciple.pdf
http://imetrics.co.jp/math2/p-進数.pdf

http://imetrics.co.jp/opinion/素数という魔物.pdf

Reference ::山崎隆雄、「p-進世界へようこそ」参照

http://nc.math.tsukuba.ac.jp/index.php?action=cabinet_action_main_download&block_id=282&room_id=80&cabinet_id=1&file_id=6&upload_id=202