

一階述語論理FOPL

人工知能 Artificial intelligence, AI は、人間に代わって選択や判断ができる。そこには、意思決定のアルゴリズムが働かなくてはならない。これを論理logicと呼ぼう。論理を数学的に定義してみる。

論理とは、命題を記号化して機械的に推論を導けるシステムのことだ。最も基本的なものに、命題論理 propositional logic がある。命題論理は、原始命題の範囲で、これ以上細かな情報は入っていないので、真 true, 偽 false しか表せないが、論理記号(\neg \wedge \vee \rightarrow)で複雑な命題にすることができる。記号で書くと、 $P, Q \Rightarrow R$ から論理的帰結Rが導ける。例えば、P: 雨が降っている。Q: 雨が降っているならば、道路が濡れている。 $(P, P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ 道路が濡れている。これならコンピュータで機械的に解ける。P: Socrates is a human. ソクラテスは人間である。Q: Every human is mortal. すべての人間は死ぬ運命にある。 $\Rightarrow R$: Socrates is mortal. ソクラテスは死ぬ運命にあると、人間なら論理的帰結を導く。しかし、Rは、 $P \wedge Q$ の論理的帰結ではない。これをコンピュータで自動的に解くと、R:すべてのソクラテスは死ぬ運命にあると導く。

人間は、言葉で推論 inferenceする。コンピュータでこれを可能にするには、述語を論理的扱う規則がなければならない。グッドマスを書いたマーク・シー・シュー=キャロルは、彼の著作「ギークのためのグッドマス」で、SF映画スタートレックのミスター・スポックは、論理的じゃないと指摘している。確かにそうだ。映画のおかげで、論理という言葉が、常識的という意味で誤解されてしまった。論理的とは、命題に対して、標準的な述語論理の規則のもとで、形式的な体系を使って推論できる、もしくは、証明できることが論理的であるという。数学で使う一階述語論理 FOPL, 1st order predicate logicと呼ぶ論理は、「もし~ならば」(含意 implication)、という文は、「もしif」の部分が偽であるか、「ならばthen」の部分が真trueであれば真である。

実は、論理は一つではない。先ず、排中律(law of the excluded middle)を思いつく。排中律とは、与えられた命題Aに対し「AまたはAでない」が真であること。排中律は、FOPLでは恒等式tautologyと呼ばれるものの一種である。直感主義 intuitionistic logic では、「AまたはAでない」は、必ずしも真ではない。「A」が証明できるか「A」でないが証明できれば「AまたはAでない」を証明できるが、「AまたはAでない」がなんの前提なしに成り立つ保証はない。計算木論理 computation tree logic; CTLという時間の変移を扱える論理もある。

コンピュータで自動的に扱える論理の一つが、一階述語論理 FOPLだ。FOPLを構成する基本がオブジェクトobjectという。コンピュータサイエンスでいうオブジェクトとは違うものだ。オブジェクトは命題ではない。オブジェクトは個体である。オブジェクトの数は有限でも無限にあってもよい。オブジェクトの性質 propertyとして命題を定義する。オブジェクトで関係 relationを命題として定義できる。オブジェクトで関数 functionも定義できる。

さて、原始命題は、一つの述語記号とその(引数)項から構成する。例えば、A is a friend of the daughter of B, Friend(A, daughter(B))という具合だ。前述した命題論理をFOPLで記述してみよう。Every human is mortal. すべての人間は死ぬ運命にある。

全称記号(すべての) \forall を使って、 $\forall x \text{ Human}(x) \rightarrow \text{Mortal}(x)$. Every human is mortal = Everything is mortal if it is human = For all object, if it is human, then it is mortal.

さらに記号を使うと、

$\forall x \text{ Human}(x) \rightarrow \text{Mortal}(x)$,

$x = \text{Socrates}$.

$\text{Human}(\text{Socrates}) = \text{Mortal}(\text{Socrates})$

となり、コンピュータで、ソクラテスは死ぬ運命にあるという帰結を得ることができる。実際、AIにおける計算は、以前述べたように高階述語論理にまで対応している。さらに、膨大なデータからマイニングや統計処理を含めて推論が行われる。

なんでもかんでもAIブームだと騒がれているが、筋電センサーで動くロボットやリモコンで動くドローンに眼を奪われてはいけない。AIとは、自動的に論路的帰結を求める論理学のことなのだ。

Good Math, A Geek's Guide to the Beauty of Numbers, Logic, and Computation by Mark C. Chu-Carroll

Mark begins his journey with the basics of numbers, with an entertaining trip through the integers and the natural, rational, irrational, and transcendental numbers. The voyage continues with a look at some of the oddest numbers in mathematics, including zero, the golden ratio, imaginary numbers, Roman numerals, and Egyptian and continuing fractions. After a deep dive into modern logic, including an introduction to linear logic and the logic-savvy Prolog language, the trip concludes with a tour of modern set theory and the advances and paradoxes of modern mechanical computing.